

Chapitre 1

Nombres hyperréels

1.1 Introduction intuitive

Considérons la fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x^4}$ pour tout réel x non nul dont le graphique est représenté sur la figure 1.1

Lorsque la variable x s’approche du seul nombre 0 pour lequel la fonction f n’est pas définie, on constate que le graphe de f semble se confondre avec l’axe des abscisses, ce qui laisse supposer que $f(x)$ est alors nul, supposition évidemment fausse puisque l’exponentielle est une fonction toujours strictement positive; notons de plus que la fonction f paraît partout définie alors qu’elle ne l’est pas en 0.

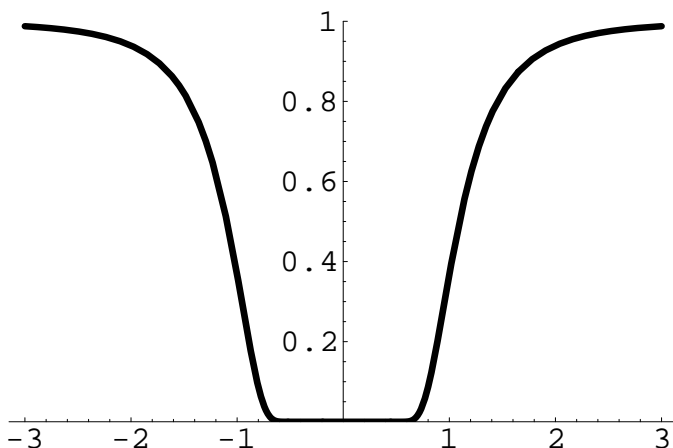


Figure 1.1: Représentation graphique de $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^4}}$ et visualisation de nombres $f(x)$ qui paraissent infiniment petits lorsque x est infiniment petit.

L’idée importante à retenir de cet exemple, c’est que $f(x)$ devient “infiniment proche” de 0 lorsque x se rapproche de 0, au point que l’œil humain ne voit pas la différence entre les nombres $f(x)$ et 0. Formellement, on pourrait affirmer que $f(x)$ devient alors “infiniment petit”, ce qui pourrait se traduire techniquement par le fait que $f(x)$ devient

inférieur à tout nombre réel positif; cela semble confirmé par la figure ci-dessus. Toutefois, il est clair que le seul nombre réel non négatif qui est inférieur à tout réel positif est 0. Comme $f(x)$ n'est jamais nul, mais semble "infinitement petit", il apparaît nécessaire d'introduire de nouveaux "nombres" que l'on qualifiera d' "infinitement petits" et qui sont imperceptibles dans la réalité quotidienne, de même que tout corps chimique est composé d'atomes que l'on ne peut pas observer à l'oeil nu. Pour poursuivre cette analogie chimique, on pourrait dire que tout se passe en fait comme si on disposait d'un microscope imaginaire "infinitement puissant" qui nous permettrait de découvrir sur la droite numérique de nouveaux nombres lorsque l'oculaire est pointé sur le point 0 : ces nombres sont appelés des nombres infinitement petits (voir figure 1.2). Nous reviendrons, dans la suite, plus en détail sur ce concept de microscope infinitement puissant.

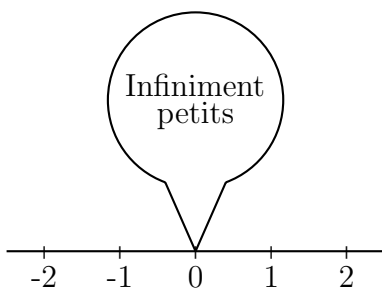


Figure 1.2: Nombres infinitement petits au travers d'un microscope infinitement puissant

Cette manipulation peut être recommencée en traduisant le microscope pour le pointer sur un nombre réel r quelconque : on découvrira alors l'existence d'une infinité de nombres "infinitement proches" de r . La figure 1.3 propose une visualisation par ordinateur de nombres $f(x)$ "infinitement proches" de 1 lorsque x est infinitement proche de 2.

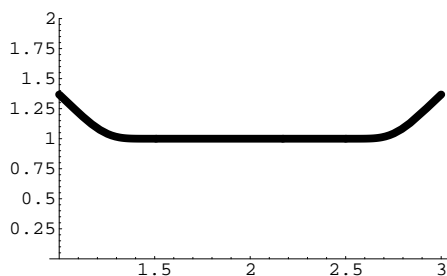
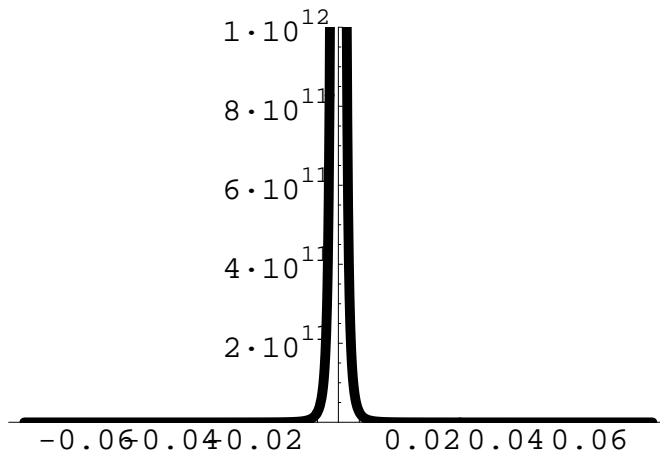


Figure 1.3: Nombres $f(x)$ paraissant infinitement proches de 1 lorsque x est infinitement proche de 2

Dans la même idée, on peut introduire des nombres "infinitement grands positifs (resp. négatifs)", c'est-à-dire supérieurs (resp. inférieurs) à n'importe quel réel positif (resp.

négatif) : intuitivement, il s'agit de prendre l'inverse d'un nombre non standard infiniment petit et positif (resp. négatif). Leur visualisation est moins évidente puisque tout se passe alors "à l'infini", c'est-à-dire pour des valeurs extrêmement grandes en valeur absolue, et même de valeurs absolues plus grandes que tout nombre concevable. La figure 1.4 suggère toutefois leur existence.

Figure 1.4: Nombres $f(x)$ paraissant infiniment grands pour x infiniment petit



Ces nouveaux nombres ne peuvent donc pas être réellement "observés à l'oeil nu", néanmoins ils peuvent être imaginés au moyen d'un "téléscope infiniment puissant" pointé vers la droite (resp. la gauche) de la droite numérique traditionnelle.

En résumé, alors que les nombres réels peuvent être visualisés au départ de la traditionnelle droite numérique, dont chaque point est associé à un et à un seul nombre réel (appelé l'*abscisse* du point), nous pouvons imaginer les nouveaux nombres introduits comme obtenus en pointant un microscope infiniment puissant sur le point d'abscisse 0 (cas des infiniment petits) ou sur un réel non nul (cas des infiniment proches du réel), ou bien en faisant appel à un télescope infiniment puissant dirigé vers la droite (cas des infiniment grands positifs) ou vers la gauche (cas des infiniments petits négatifs).

Au vu de ces exemples suggestifs, nous proposons d'adjoindre aux nombres réels classiques, encore appelés *standards*, de nouveaux nombres dits *non standards*. On obtient de la sorte une collection de tous les nombres standards et non standards; cet ensemble sera noté ${}^*\mathbb{R}$. On a $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$; l'idée fondamentale suivie consiste à "prolonger" \mathbb{R} en ${}^*\mathbb{R}$, de manière à en conserver les propriétés; par exemple, toutes les opérations algébriques valables sur \mathbb{R} vont "s'étendre naturellement" sur ${}^*\mathbb{R}$ ¹.

¹Ce point important sera précisé ultérieurement.

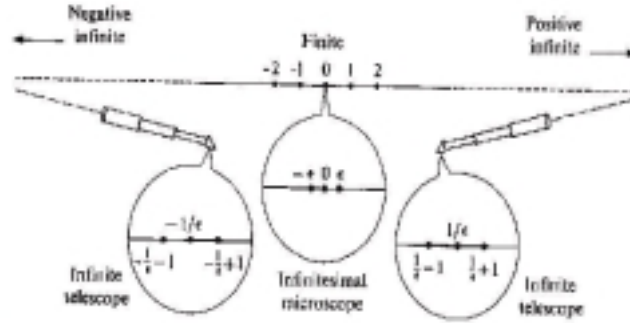


Figure 1.4.4

1.2 Définitions

On qualifiera désormais de nombre *hyperréel*, ou plus simplement de nombre, tout élément de ${}^*\mathbb{R}$, qu’il soit standard ou non standard; pour éviter toute confusion, nous veillerons, dans la mesure du possible, à noter les nombres non standards d’une autre façon que les réels (standards). Ces derniers seront notés classiquement par des lettres: a, b, \dots pour des constantes et x, y, r, n, p, \dots pour des variables ou paramètres. Tandis que nous désignerons le plus souvent les nombres non standards soit par une lettre grecque: $\alpha, \varepsilon, \omega, \dots$, soit par une lettre latine précédée du signe *: $*x, *y, \dots$.

Les nombres hyperréels sont répartis dans trois “catégories” en fonction de leur *ordre de grandeur*. Intuitivement, les hyperréels sont

- soit extrêmement ou “infiniment” petits au point d’être trop petits pour être distingués de 0,
- soit “appréciables” c’est-à-dire d’une grandeur “normale à l’échelle humaine”,
- ou encore extrêmement ou “infiniment” grands c’est-à-dire trop grands pour être observés par l’homme.

En analyse non-standard, on parle alors respectivement de nombres *infiniment petits*, *appréciables* et *infiniment grands*; ces nombres se manipulent suivant des règles différentes selon leur ordre de grandeur: par exemple, conformément à l’intuition, un nombre appréciable n’est (pratiquement) pas modifié si on lui ajoute un infiniment petit, mais fournit un infiniment grand quand on lui ajoute un infiniment grand. Nous reviendrons ultérieurement sur de telles règles, mais auparavant formulons ces définitions de manière rigoureuse.

Définition 1.2.1 • *Un nombre infiniment petit (en abrégé, ip) est un hyperréel $*x$ non nul tel que,*

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, -r < *x < r,$$

*x est alors un infiniment petit positif (en abrégé, *ipp*) ou un infiniment petit négatif (en abrégé, *ipn*) selon qu'il est positif ou négatif.

- Le halo de 0 est l'ensemble, noté $H(0)$, composé de tous les hyperréels infiniment petits.
- Deux hyperréels distincts *x et *y sont dits infiniment proches, ce qui se note ${}^*x \approx {}^*y$, lorsque ${}^*x - {}^*y$ appartient à $H(0)$ ².
- On écrit encore ${}^*x \lesssim {}^*y$ lorsque ${}^*x < {}^*y$ et ${}^*x \approx {}^*y$; ${}^*x \gtrsim {}^*y$ lorsque ${}^*x > {}^*y$ et ${}^*x \approx {}^*y$; ${}^*x \cong {}^*y$ lorsque ${}^*x \approx {}^*y$ ou ${}^*x = {}^*y$.

Le halo de 0 contient une infinité de nombres hyperréels négatifs et une infinité de nombres hyperréels positifs. Tout élément de $H(0)$ est un nombre non standard qui est infiniment proche du réel standard 0.

La translation de notre "microscope" en un point autre que 0 de la droite numérique réelle nous conduit à définir de nouveaux nombres non standards qui sont infiniment proches d'un nombre réel et dont ce dernier en est, pour ainsi dire, la partie observable. On dispose alors de ces nouvelles définitions :

Définition 1.2.2 Soit r un réel standard quelconque.

- On appelle halo de r , l'ensemble, noté $H(r)$, de tous les hyperréels non standards qui sont infiniment proches de r .
- Un hyperréel standard ou non standard est qualifié d'appréciable (en abrégé, *ap*) lorsqu'il est égal à ou infiniment proche d'un réel non nul; un tel nombre peut être positif (en abrégé, *app*) ou négatif (en abrégé, *apn*).

Comme c'était le cas pour 0, le halo d'un réel non nul ne contient aucun nombre réel, mais une infinité de nombres non standards qui lui sont inférieurs ou supérieurs.

Etant donné qu'un hyperréel infiniment petit positif est, par définition, non nul mais strictement inférieur à tout réel standard positif, il est possible d'en prendre son inverse qui est alors toujours positif, mais cette fois plus grand que tout réel positif. Un tel nombre est donc non standard et est appelé un infiniment grand positif. On peut procéder de même en inversant un infiniment petit négatif, ce qui nous conduit à ces nouvelles définitions :

Définition 1.2.3 • Un nombre hyperréel *x qui est supérieur (resp. inférieur) à tout réel positif (resp. négatif) est appelé un infiniment grand positif, en abrégé *igp* (resp. un infiniment grand négatif, en abrégé *ign*).

- Un infiniment grand (en abrégé *ig*) est soit un infiniment grand positif, soit un infiniment grand négatif.

²Très souvent, dans la littérature, un réel fait partie de son halo ce qui fait de la relation \approx une relation d'équivalence; avec nos définitions, \approx n'est plus une relation d'équivalence; par contre \cong l'est.

- *L'ensemble de tous les nombres infiniment grands est noté $H(\infty)$; de même, on écrit $H(+\infty)$ et $H(-\infty)$ pour désigner respectivement l'ensemble de tous les hyperréels infiniment grands positifs et celui des infiniment grands négatifs.*
- *Un hyperréel infiniment grand est encore qualifié de non limité, tandis qu'un hyperréel est dit limité, en abrégé *lm*, lorsqu'il n'est pas infiniment grand.*

Remarquons que tout infiniment grand est forcément non standard et que deux infiniment grands peuvent être infiniment proches l'un de l'autre : par exemple, si ω désigne un infiniment grand positif et ε un infiniment petit, on a $\omega \approx \omega + \varepsilon$; aucun infiniment grand n'est infiniment proche d'un réel. Il est clair que l'opposé d'un infiniment grand positif (resp. négatif) est un infiniment grand négatif (resp. infiniment grand positif).

Modélisation 1 : L'ordre de grandeur des nombres.

L'être humain utilise des nombres en de multiples occasions. Dans la vie courante, les nombres manipulés ne sont souvent ni très grands, ni très petits. Par exemple, les petits enfants se débrouillent dans la vie en connaissant seulement les premiers entiers naturels : “un, deux, trois, ... beaucoup”; par ailleurs, les distances parcourues par des travailleurs pour rejoindre quotidiennement leur lieu de travail dépassent rarement les centaines de kilomètres, ou encore les prix des produits consommés sont généralement de l'ordre de quelques centaines, voire milliers d'unités monétaires, ...

Mais, soucieux de toujours mieux comprendre et exploiter l'univers dans lequel il vit, l'homme est parfois amené à considérer des nombres soit extrêmement grands, soit extrêmement petits. Par exemple, un gestionnaire d'une grande entreprise multinationale gère quelquefois des sommes colossales; ou encore, des scientifiques estiment que le rayon de l'univers mesure approximativement 13×10^{25} mètres, mais qu'un atome mesure environ 10^{-10} mètre.

De tels nombres sont beaucoup plus grands ou plus petits que ceux exploités dans la vie courante. La XIX^{ème} Conférence générale des poids et mesures a, en 1991, adopté des préfixes et abréviations pour désigner de tels ordres de grandeur (cité par Deledicq-Casiro (1997), p. 47) (Tableau 1.1)

Au fur et à mesure que l'on descend dans la première (resp. troisième) colonne de ce tableau, on atteint des nombres de plus en plus grands (resp. petits). Les derniers d'entre eux deviennent même difficilement concevables, et ne sont pas à mettre sur le même pied que les premiers : ils préfigurent l'idée intuitive des nombres non standards infiniment grands (resp. infiniment petits).

Le modèle numérique non-standard n'est pas homogène, en ce sens qu'il propose des règles différentes selon l'ordre de grandeur des hyperréels considérés. Il est ainsi mieux adapté que la théorie classique des réels pour traiter des nombres exceptionnellement élevés ou bas.

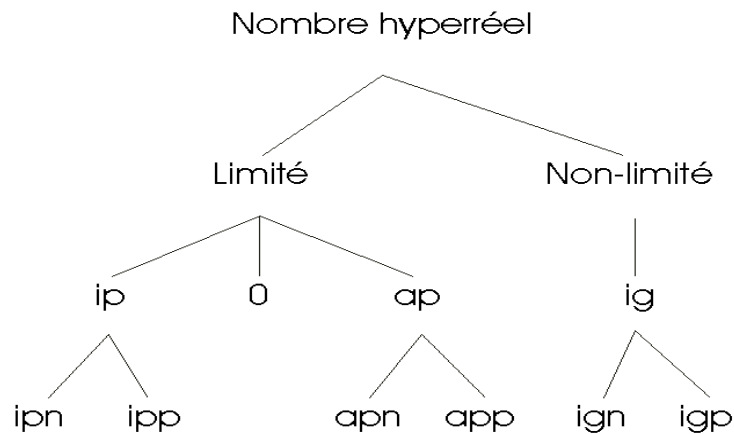
Ainsi, tout nombre hyperréel est un nombre non limité ou un nombre limité ; dans ce dernier cas, il est soit le réel 0, soit un nombre (forcément non standard) infiniment petit,

Tableau 1.1: Préfixes et abréviations adoptés par la XIX^{ème} Conférence générale des poids et mesures en 1991

Multiples	Préfixe	Sous-multiples	Préfixe
10^1	déca (da)	10^{-1}	déci (d)
10^2	hecto (h)	10^{-2}	centi (c)
10^3	kilo (k)	10^{-3}	milli (m)
10^6	méga (M)	10^{-6}	micro (μ)
10^9	giga (G)	10^{-9}	nano (n)
10^{12}	téra (T)	10^{-12}	pico (p)
10^{15}	peta (P)	10^{-15}	femto (f)
10^{18}	exa (E)	10^{-18}	atto (a)
10^{21}	zetta (Z)	10^{-21}	zepto (z)
10^{24}	yotta (Y)	10^{-24}	yocto (y)

soit encore un appréciable, c'est-à-dire un réel non nul ou un nombre non standard qui est infiniment proche d'un réel non nul. La figure 1.5 illustre ces différentes possibilités.

Figure 1.5: Représentation en arbre des différents ordres de grandeur



Modélisation 2 : Encadrement de réels.

Une mesure expérimentale est rarement connue avec exactitude, mais est souvent déterminée avec une “marge d’erreur” qui dépend, par exemple, de la précision de l’instrument de mesure utilisé ou des qualités personnelles de l’expérimentateur. Par exemple, quand on affirme qu’une personne mesure 1,8 mètre, l’on veut dire que sa taille, en centimètres, est comprise dans l’intervalle $[175, 185[$; cette taille est donc “encadrée” par les deux limites de 175 et 185 entre lesquelles elle est comprise. Elle peut dès lors s’écrire sous la forme 180 ± 5 . En effet, si l’on effectuait de nombreuses mesures, la moyenne des résultats serait “vraisemblablement” proche de 180, avec une erreur possible de 5 centimètres aussi bien par défaut que par excès. Bien entendu, si la précision de la mesure grandit, l’intervalle susceptible de contenir la taille véritable se rétrécit.

La notion de halo d’un nombre ne fait rien d’autre que de modéliser la manière de fournir une mesure quantitative au moyen d’un “intervalle” de longueur extrêmement (ou infiniment) petite, ce qui correspond à une précision de mesure extrêmement (ou infiniment) grande.

1.3 Algèbre sur ${}^*\mathbb{R}$

1.3.1 Ordre au sein des hyperréels

Les propriétés d’ordre entre réels sont “prolongées” sur ${}^*\mathbb{R}$, de sorte que, dans les faits, on a “plongé” l’ensemble classique \mathbb{R} des nombres réels dans une collection “plus vaste”. Ainsi, la collection de tous les nombres standards ou non est ordonnée en prolongeant l’ordre des réels standards et respecte, de plus, les règles suivantes³ :

- tout nombre compris entre deux infiniment petits (resp. limités) est un infiniment petit (resp. limité),
- tout limité est inférieur à tout infiniment grand positif et supérieur à tout infiniment grand négatif,
- tout nombre supérieur (resp. inférieur) à un infiniment grand positif (resp. un infiniment grand négatif) est un infiniment grand positif (resp. infiniment grand négatif).

De la sorte, l’ordre total \leq au sein des réels est prolongé naturellement sur ${}^*\mathbb{R}$. Il existe toutefois une différence importante entre ces deux ensembles totalement ordonnés \mathbb{R} et ${}^*\mathbb{R}$. En effet, l’ordre sur \mathbb{R} est complet : cela signifie que tout sous-ensemble E de \mathbb{R} qui est majoré admet un plus petit majorant⁴; cette propriété est d’ailleurs à la base de beaucoup

³Ces règles peuvent être démontrées en se servant des définitions (voir exercices du chapitre 1)

⁴Un sous-ensemble E de \mathbb{R} est majoré s’il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M \forall x \in E$, M est alors appelé un majorant de E

de résultats fondamentaux sur les fonctions numériques (par exemple, les théorèmes de valeurs intermédiaires ou encore de Weierstrass, sur lesquels nous reviendrons plus tard). Par contre, l'ordre sur ${}^*\mathbb{R}$ n'est pas complet : pour preuve, les ensembles des infiniment petits et des appréciables sont majorés (le premier, par tout appréciable positif; le second, par tout infiniment grand positif) mais n'admettent pas de plus petit majorant.

Il n'est pas possible de donner une définition mathématique, en termes de propriétés d'ordre, des "frontières" existant entre les différents ordres de grandeur. Ceci est loin d'être gênant, car, de la sorte, la droite numérique hyperréelle modélise parfaitement, et mieux que la classique droite numérique réelle, de nombreux phénomènes d'évolution rencontrés dans la vie courante.

Modélisation 3 : Transitions numériques floues.

Comme l'a écrit R. Lutz [Lutz (1987), p. 81] : "loin de constituer un handicap (comme le veut une tradition bien ancrée), le fait que les i.p., limités, i.g. n'admettent pas de bornes supérieures (ou inférieures) engendre un outil puissant et permet aussi de modéliser les transitions floues dans les phénomènes évolutifs; on a enfin une mathématique du "chaînon manquant" cher au paléontologiste". Par ailleurs, le même auteur a écrit, en collaboration, l'avis suivant : "que la grandeur n'ait pas de frontière précise est inscrit dans sa nature profonde. La plupart des phénomènes collectifs n'ont pas de frontière précise dans le monde empirique". [Lutz - Makhlouf - Meyer (1996), p. 106]

1.3.2 Opérations algébriques sur ${}^*\mathbb{R}$

Sur ce nouvel ensemble ordonné de nombres, il y a lieu d'instaurer une algèbre. A ce propos, l'introduction des nombres hyperréels vise essentiellement les mêmes objectifs que celle des nombres complexes. Il s'agit d'étendre les nombres réels pour répondre à des besoins nouveaux (à savoir, schématiquement, disposer de nombres positifs plus petits que tout nombre réel positif dans le cas des hyperréels, et obtenir des racines d'une équation telle que $x^2 + 1 = 0$ dans le cas des complexes), mais en veillant à utiliser les mêmes règles algébriques que dans \mathbb{R} . On instaure dès lors, sur les hyperréels, une algèbre qui redonne les traditionnelles opérations arithmétiques d'addition (+), de soustraction (-), de multiplication (\cdot) et de division (\div) lorsque les nombres considérés sont des réels. En particulier, les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité restent valables; 0 (resp. 1) reste neutre pour l'addition (resp. la multiplication); 0 est absorbant pour la multiplication.

Remarquons que, muni de ces opérations algébriques, l'existence de tous les nombres hyperréels se déduit d'une seule hypothèse, que nous qualifierons de naturelle, à savoir

Il existe un nombre positif et non nul qui est strictement inférieur à tous les réels positifs.

De cette hypothèse selon laquelle il existe au moins un nombre non standard infiniment petit positif, noté par exemple ε , on déduit l'existence d'une infinité d'infiniment petits positifs, tels que $2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$, et aussi une infinité d'infiniment petits négatifs, à savoir $-\varepsilon, -2\varepsilon, \dots$. On dispose alors aisément de nombres infiniment grands en considérant l'inverse de nombres infiniment petits. Les appréciables sont obtenus comme la somme d'un réel et d'un élément infiniment petit.

Disposant d'une algèbre sur les hyperréels, on est en mesure d'étudier des fonctions algébriques sur ${}^*\mathbb{R}$, c'est-à-dire des lois ${}^*f : {}^*x \mapsto {}^*f({}^*x)$, qui, à certains hyperréels *x appartenant à un ensemble *D , appelé le domaine de *f , associent l'hyperréel ${}^*f({}^*x)$, où *f désigne une expression algébrique formée de sommes, de différences, de produits, de quotients et de puissances de *x ainsi que de nombres constants. Par exemple, le polynôme

$${}^*x \mapsto 2({}^*x)^2 - 3{}^*x + 2$$

est défini sur tout ${}^*\mathbb{R}$, tandis que la fraction rationnelle ${}^*x \mapsto \frac{1}{{}^*x - 1}$ est définie pour tout hyperréel *x différent de 1.

Il ne faut toutefois pas perdre de vue que seules les fonctions réelles nous intéressent, puisque les nombres non standards ne sont pas observables. C'est pourquoi, nous ne considérerons que des expressions algébriques à paramètres réels et pas non standards; ainsi, pour un hyperréel ε infiniment petit, le polynôme ${}^*x \mapsto 2({}^*x)^2 - \varepsilon{}^*x + 2$ est défini sur tout ${}^*\mathbb{R}$, mais ne sera pourtant pas étudié.

Ensuite, il conviendra d'étendre les fonctions élémentaires classiques pour les définir sur ${}^*\mathbb{R}$: par exemple, il s'avérera intéressant, d'un point de vue théorique, de manipuler le sinus d'un infiniment petit ou encore le logarithme népérien d'un infiniment grand, ... Plus généralement, il conviendra d'étendre les fonctions numériques réelles (c'est-à-dire des lois du type $f : x \in D \mapsto y = f(x)$, avec $D \subset \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) sur ${}^*\mathbb{R}$. Nous ne chercherons toutefois pas à étudier toutes les fonctions hyperréelles imaginables, mais simplement à "prolonger" les fonctions numériques réelles pour les définir en certains nombres non standards. C'est ainsi que les seules bases considérées pour les fonctions exponentielles seront réelles; par exemple, la fonction ${}^*x \mapsto \omega^{*x}$, pour ω infiniment grand, ne sera pas étudiée.

Nous verrons dans le chapitre suivant comment étendre les fonctions numériques réelles, qu'elles soient algébriques ou non, et quelles sont les propriétés conservées par ces extensions.

Bien qu'en définitive, seuls les nombres réels soient intéressants (puisque les nombres non standards ne sont pas "directement observables"), il se révèle souvent intéressant de travailler dans ${}^*\mathbb{R}$ dans le but de revenir tirer les conclusions souhaitées dans \mathbb{R} . La démarche suivie est bien connue en mathématiques et peut être visualisée par le schéma suivant :

L'intérêt de ce passage par ${}^*\mathbb{R}$ avant de retourner vers \mathbb{R} peut sembler artificiel, mais il s'avère extrêmement efficace comme nous le découvrirons ultérieurement; en effet, les propriétés non standards sont souvent très intuitives et, surtout, beaucoup plus simples

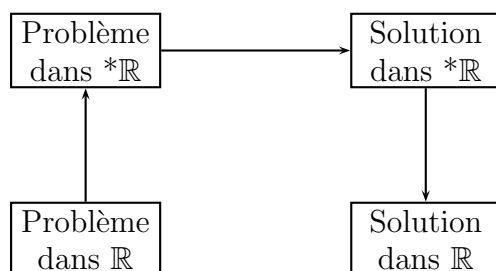


Figure 1.6: Résolution d'un problème par passage à ${}^*\mathbb{R}$

à formuler et à vérifier dans ${}^*\mathbb{R}$ que dans \mathbb{R} .

Remarque. Il convient de remarquer qu'un semblable détour n'est pas rare en mathématiques: par exemple, en géométrie, il est parfois très commode de travailler dans l'espace pour démontrer des propriétés de certaines figures planes, ou encore, en algèbre, on obtient aisément des propriétés de polynômes à coefficients réels en travaillant avec des nombres complexes. Le fait de travailler dans un ensemble plus grand donne plus de latitudes et facilite, dans certains cas, la résolution du problème posé.

1.4 Annexes

1.4.1 Citations historiques

- *Le tic-tac rythmique et régulier de l'horloge incite Leibniz à imaginer les sons suspendus dans l'espace : il lui semble voir ce qu'il entend, chaque tic-tac léger éclatant devant ses yeux comme une petite explosion multicolore. Il se concentre sur l'une d'elles dont le son (ou la vision) marque l'instant où elle apparaît puis disparaît, et avec le pouce et l'index de sa main gauche il mesure la distance entre le son déjà disparu et celui qui va venir. (...) La distance entre les temps est infiniment petite. Oui, infiniment petite, mais pourtant elle n'est pas rien cette distance. Et si elle n'est pas rien, elle doit être représentée par un nombre. Pas un vrai nombre, pense-t-il, réglant ses pensées pour les accorder avec sa propre audace, mais une fiction utile, un objet imaginaire. Et qui doit être plus petit que tout autre nombre. Est-ce 0 alors ? Non, cela ferait de toute chose une aberration, la division par zéro étant une invitation vers le trou noir du non-sens. Plus petit que tout autre nombre mais plus grand que zéro. Intéressant. Un nombre infiniment petit mesurant une distance infiniment petite dans le temps. Leibniz allonge ses jambes sous le bureau. Des nombres infiniment petits ? Ses paupières se font lourdes. Il est tard. Il fut un temps où il restait assis comme ça toute la nuit. Et pourquoi pas, après tout ? (...) Pourquoi pas une compression des nombres si intense qu'elle soit l'inverse de l'infiniment grand ? C'est un bien grand pas à franchir, mais, au-delà, il peut voir*

se déployer le reste du Calcul; dans les situations de ce genre, Leibniz, en passant automatiquement de l'allemand au français, pense qu'il n'y a que le premier pas qui coûte. [Berlinski (2001), pp. 141-142].

- *Si quelqu'un n'admet point des lignes infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$), lesquelles, toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'être utiles, et même nécessaires à exprimer analytiquement des grandeurs réelles. [Leibniz (1702), cité par Gaud-Guichard-Sicre-Chrétien (1998), p. 34].*
- *Ces quantités infinitésimales n'étant toutes que des quantités auxiliaires, c'est-à-dire introduites seulement dans le calcul pour faciliter l'expression des conditions proposées, il est clair qu'il faut absolument les éliminer du calcul pour obtenir le résultat désiré, c'est-à-dire les rapports cherchés; ainsi on peut dire en quelque sorte que le calcul infinitésimal est un calcul non fini, parce qu'en effet dès qu'on est parvenu à en éliminer les quantités auxiliaires et qui n'y entrent pas essentiellement, il cesse d'être infinitésimal, et ressemble en tout au calcul algébrique ordinaire. [Carnot (1709, cité par Gaud-Guichard-Sicre-Chrétien (1998), p. 34].*
- *Car enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. [Pascal (1669), cité par Deledicq-Deledicq-Casiro (1996), p. 61].*
- *Mais au point de vue où l'homme se trouve placé pour observer les phénomènes et mesurer les grandeurs qui en dépendent, il y a des unités de mesure indiquées par la nature des choses, et d'une disproportion telle quand on passe d'un ordre de phénomène à un autre, que l'on est effectivement conduit à établir entre des quantités de même espèce une subordination de grandeur. (...) On a pu dire avec fondement que les infiniment petits "existent dans la nature" [Cournot (1841), pp.79 et 87].*
- *Nous proposons de penser que les objets non-standard sont des objets, soit inaccessibles parce que trop lointains, soit imperceptibles parce que trop petits, soit imperceptiblement proches d'un objet standard qui en serait l'"ombre". Les objets standard sont alors les objets "observables" sur lesquels on peut "expérimenter". [Deledicq - Diener (1989), p. 179].*
- *Le meilleur moyen de comprendre ce qu'il y a de nouveau est peut-être d'aller voir pourquoi l'ancien calcul des infiniment petits a échoué. On peut retenir deux principales critiques qui finirent par avoir raison de lui. La première fut formulée pour l'essentiel par Berkeley : analysant les raisonnements suivis par Guillaume de l'Hospital, il constata que si une grandeur dx est infiniment petite, assurément $2 \cdot dx, 3 \cdot dx$ sont également des infiniment petits; mais $(\frac{1}{dx}) \cdot dx$ ne l'est plus. Or*

de l'Hospital est incapable de préciser une règle rigoureuse permettant de décider pour quelles valeurs du nombre n , $n \cdot dx$ est infiniment petit. (...) La seconde critique est philosophique, et provient des rationalistes, comme d'Alembert et Lagrange: les infiniment petits, selon la définition de leurs partisans, sont "plus petits que toute grandeur assignable, quoique non nuls". Ils sont donc eux-mêmes, par nature, inassignables, c'est-à-dire inobservables : bref, métaphysiques. [Harthong (1983), p.1195]

1.4.2 Structure algébrique de ${}^*\mathbb{R}$

On érige l'ensemble ${}^*\mathbb{R}$ en un corps totalement ordonné et commutatif qui est l'extension du corps des réels et contient (au moins) un élément qui n'est pas réel, dont l'élément neutre pour la loi additive est le réel 0 tandis que l'élément neutre pour la loi multiplicative est le réel 1. Dans cette nouvelle algèbre, on note comme dans \mathbb{R} les lois additive et multiplicative, à savoir à l'aide des signes $+$ et \cdot respectivement; ces lois permettent d'introduire, de la manière habituelle, les opérations de soustraction et de division dans ${}^*\mathbb{R}$. En termes équivalents, ${}^*\mathbb{R}$ devient un ensemble sur lequel les opérations $+$ et \cdot sont internes, partout définies, associatives et commutatives, respectent les règles de distributivité (à savoir,

$$(*x + *y) \cdot *z = (*x \cdot *z) + (*y \cdot *z)$$

et

$$*x \cdot (*y + *z) = (*x \cdot *y) + (*x \cdot *z)$$

pour tous hyperréels $*x$, $*y$ et $*z$). On dit encore que $({}^*\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ est un corps commutatif.

Chapitre 2

Règles fondamentales de l'analyse non standard

2.1 Règles de Leibniz

A l'aide d'un logiciel, visualisons deux nombres paraissant infiniment petits, ainsi que leur somme : on observe que la somme semble être un infiniment petit ainsi qu'en atteste la figure 2.1.

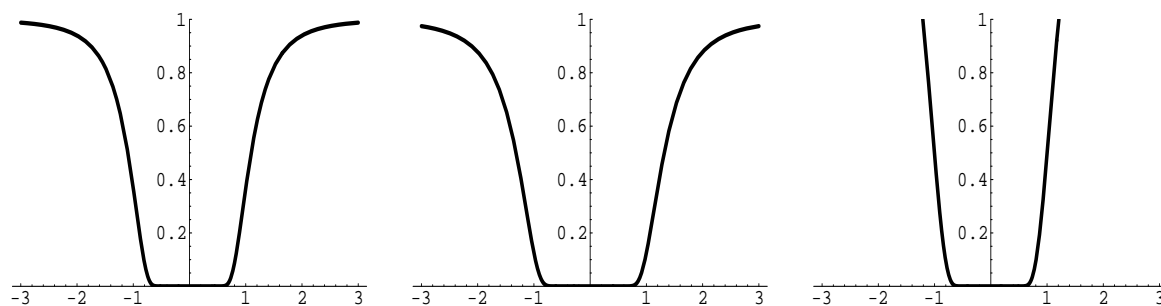


Figure 2.1: $f_1 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^4}}$, $f_2 : x \mapsto \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{x^4}}$ et $x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$

De la même manière, on constate par exemple que le produit de deux nombres paraissant infiniment grands semble lui-même infiniment grand; ainsi que le montre la figure 2.2

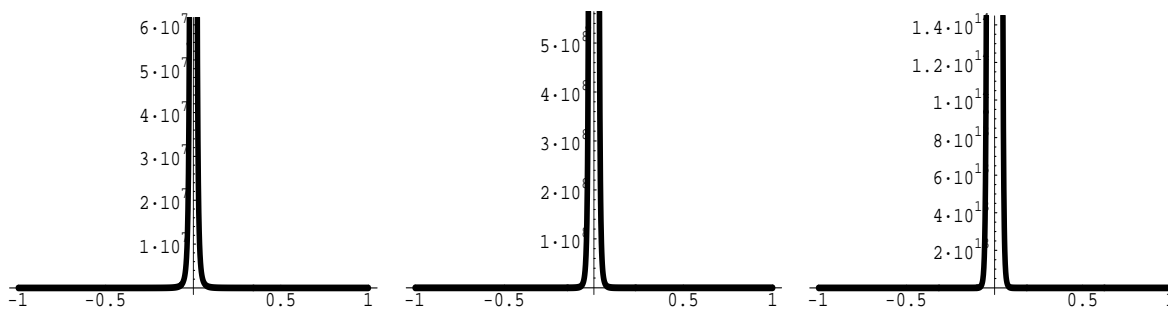


Figure 2.2: $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(0,5x)^4}$, $f_4 : x \mapsto \frac{1}{2x^6}$ et $x \mapsto f_3(x) \times f_4(x)$

Par contre, le produit de deux nombres, dont l'un paraît infiniment grand et l'autre infiniment petit, n'a pas un ordre de grandeur bien déterminé : selon les cas, on peut en effet retrouver les trois ordres de grandeur possibles comme l'illustrent les figures 2.3 et 2.4

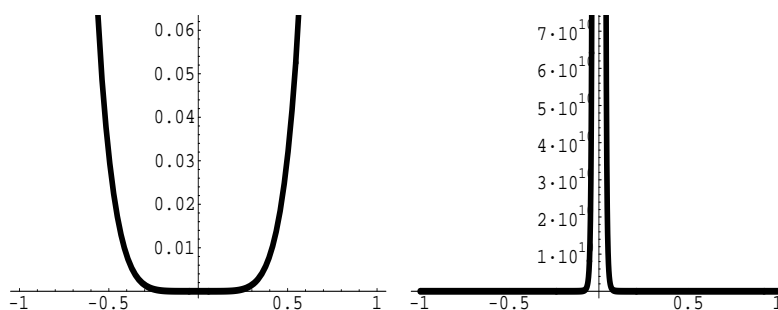


Figure 2.3: $f_5 : x \mapsto 2x^6$ et $f_6 : x \mapsto \frac{1}{2x^8}$

Ainsi que le suggèrent de tels exemples, le plus important, dans l'algèbre sur ${}^*\mathbb{R}$, est assurément le fait que les ordres de grandeur de la somme ou du produit peuvent être généralement déterminés à partir de la connaissance des ordres de grandeur des deux termes ou facteurs. Il existe néanmoins des cas où l'ordre de grandeur du résultat est "indéterminé" en ce sens qu'il peut varier avec les deux hyperréels intervenant dans l'opération.

Remarque. Une indétermination de ce type est fréquente en mathématiques; par exemple, la somme de deux réels de signe contraire peut être soit négative, soit nulle, soit positive, ce qui se traduit par la "formule" suivante : "positif + négatif = ?", alors que "positif + positif = positif" et "négatif + négatif = négatif".

Les règles régissant les ordres de grandeur pour les opérations arithmétiques traditionnelles ont été découvertes par Leibniz : c'est pourquoi, elles sont évidemment appelées *les règles de Leibniz*. Comme elles sont fort naturelles et très faciles à illustrer à l'aide

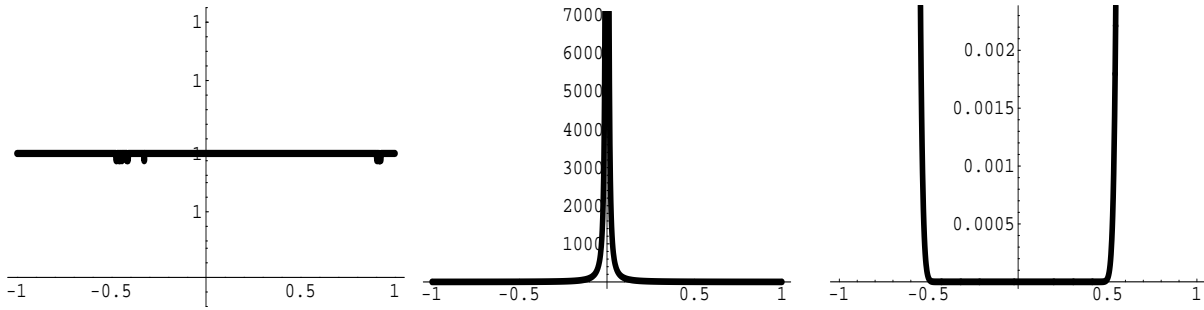


Figure 2.4: $x \mapsto f_4(x) \times f_5(x)$, $x \mapsto f_5(x) \times f_6(x)$ et $x \mapsto f_1(x) \times f_3(x)$

d'exemples et bien qu'elles puissent toutes être aisément démontrées rigoureusement à partir des définitions de base (voir les exercices du chapitre 1), nous allons nous contenter de les énoncer, avant d'insister sur quelques commentaires et exemples utiles, ainsi que sur une application concrète. Pour la lecture des tableaux 2.1 et 2.2, signalons que le premier terme ou facteur se lit dans la colonne marginale de gauche et le second dans la ligne marginale du dessus, tandis qu'un signe ? indique une indétermination (qui peut toutefois être levée dans certains cas particuliers), que le symbole - est relatif à une opération non définie et que le symbole \triangleright se lit "à pour ordre de grandeur".

+	0	ip	ap	ig	
0	0	ip	ap	ig	
ip	ip	? (ip ou 0)	ap	ig	ipp + ipp \triangleright ipp; ipn + ipn \triangleright ipn
ap	ap	ap	lm	ig	
ig	ig	ig	ig	?	(igp+igp \triangleright igp; ign+ign \triangleright ign)

Tableau 2.1: Règles de Leibniz pour l'addition

Observons tout d'abord que le tableau 2.1 est symétrique (autour de sa diagonale principale) en raison de la commutativité de l'addition. Par ailleurs, la somme de deux appréciables est certes toujours limitée, mais peut être appréciable, ou infiniment petite, ou encore nulle : par exemple, pour ε infiniment petit, $2+(1+\varepsilon)$ est appréciable, $2+(\varepsilon-2)$ est infiniment petit, $(2-\varepsilon)+(\varepsilon-2)$ est nul. Quant à l'indétermination relative à la somme de deux infiniment grands, elle n'a lieu que si les deux termes de la somme sont de signe contraire : ainsi, pour ω infiniment grand positif et α infiniment petit, $\omega + (1 - \omega)$ est appréciable, $\omega + (\alpha - \omega)$ est infiniment petit, $\omega^2 + (1 - \omega)$ est infiniment grand, $(\omega - \alpha) + (\alpha - \omega)$ est nul; par contre, la somme de deux infiniment grands de même signe est un infiniment grand du même signe. Enfin, notons que la somme de deux limités est toujours limitée, et qu'une somme de deux hyperréels ne peut être non limitée que lorsqu'au moins un des termes est infiniment grand.

Remarquons que le tableau 2.2 relatif au produit est encore symétrique par commutativité. Le produit de deux hyperréels non nuls n'est jamais nul, même si les facteurs

\times	0	ip	ap	ig
0	0	0	0	0
ip	0	ip	ip	?
ap	0	ip	ap	ig
ig	0	?	ig	ig

Tableau 2.2: Règles de Leibniz pour la multiplication

sont infiniment petits. Il existe pour le produit un cas d'indétermination lorsque l'un des facteurs est infiniment grand et l'autre infiniment petit; pour preuve, si ε désigne un infiniment petit positif, les nombres $\frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sont des infiniment grands positifs dont le produit avec ε donne respectivement un nombre appréciable, un infiniment petit positif et un infiniment grand positif. Mentionnons encore que le produit de deux hyperréels limités est toujours limité, et qu'un produit de deux hyperréels ne peut être non limité que si l'un des facteurs au moins est infiniment grand : dans ce cas comme dans tous les autres d'ailleurs, les classiques règles des signes (à savoir, "plus par plus donne plus", "moins par moins donne plus", "plus par moins donne moins") permettent de déterminer le signe du résultat. Terminons en rappelant que 0 est neutre pour l'addition et qu'il est absorbant pour la multiplication quelque soit le facteur hyperréel auquel il est multiplié, même si ce facteur est infiniment grand.

De ces règles de base, on déduit aisément celles relatives à la différence et au quotient de deux hyperréels, puisque l'on sait que l'opposé d'un hyperréel est du même ordre de grandeur que ce dernier, tandis que l'inverse d'un infiniment petit (resp. appréciable, infiniment grand) est un infiniment grand (resp. appréciable, infiniment petit) (voir les exercices du chapitre 1). Les règles relatives à ces deux opérations engendrent ainsi des "nouveaux" cas d'indétermination qui découlent des cas d'indétermination de la somme et du produit: $igp - igp$ et $ign - ign$ correspondent à $igp + ign$ tandis que ig/ig et ip/ip sont équivalents à $ig \times ip$.

Modélisation 4. Calculs approchés

Dans la pratique, on est souvent amené à effectuer des calculs portant sur des nombres fort différents et à travailler alors par approximation en négligeant certaines données : ce n'est pas la valeur numérique exacte qui importe, mais seulement son ordre de grandeur.

Par exemple, si un consommateur achète une voiture neuve, son choix ne sera guère influencé par une ristourne (ou un supplément) de quelques euros, car il considère cette variation de prix comme "négligeable". En fait, il utilise alors inconsciemment le modèle numérique non standard : pour lui, le prix de base de véhicule est un nombre appréciable (voire très grand) et la diminution (ou le supplément) proposée est très petite et n'influencera donc (presque) pas le prix initial en vertu des règles de Leibniz.

De telles pratiques sont fréquentes : numériquement, on effectue alors des "calculs approchés" en négligeant des nombres très petits ou en ne retenant que des nombres très grands. Par exemple, on écrit $10^{10} + 2 \approx 10^{10}$ et $10^{-10} + 2 \approx 2$; dans ces cas, on n'a pas avec exactitude une égalité ... mais néanmoins une fort bonne approximation. Tout se passe comme si on assimilait le nombre 10^{10} (resp. 10^{-10}) à un hyperréel infiniment grand (resp. infiniment petit), alors que 2 est appréciable : le résultat est alors fourni par les règles correspondantes de Leibniz.

Insistons sur le fait que pareil raisonnement consiste à exploiter un modèle mathématique abstrait et que, comme c'est le cas pour tout modèle mathématique, on ne peut l'appliquer avec efficacité que lorsque ses hypothèses sont satisfaites sans ambiguïté.

2.2 Règles sur la partie standard

Proposition 2.2.1 *Pour tout hyperréel *x limité, il existe un unique réel r qui est infiniment proche ou égal à *x*

Preuve. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq s$ tels que ${}^*x \approx r$ et ${}^*x \approx s$. Par définition, il existe ε, η ip ou nuls tels que ${}^*x = r + \varepsilon$ et ${}^*x = s + \eta$. Dès lors, on a $r - s = \varepsilon - \eta$. Le premier membre étant réel, le deuxième membre ne peut être que nul, ce qui entraîne $r = s$ alors que nous les avons supposés différents. ■

Définition 2.2.2 *Pour tout hyperréel *x limité, l'unique réel r qui est infiniment proche ou égal à *x est appelé la partie standard¹ de *x et se note $\text{st}({}^*x)$.*

¹Bien que l'appellation *partie standard* est la plus courante, certains auteurs utilisent le terme *ombre*; les mots *partie observable* pourraient aussi avantageusement remplacer ces différentes dénominations.

Bien entendu, tout réel est sa propre partie standard et, dès lors, deux réels distincts ont des parties standard qui diffèrent. Par ailleurs,

- si ε est un infiniment petit, sa partie standard coïncide avec le nombre 0;
- si *x est un hyperréel appréciable, sa partie standard est un réel non nul;

Insistons encore sur ces deux points :

- seules les parties standards des hyperréels limités peuvent être observées ;
- un hyperréel infiniment grand ne possède pas de partie standard puisqu'il n'est infiniment proche d'aucun réel standard.

Comme nous l'avions déjà souligné dans l'introductions intuitive, il est possible de visualiser la situation par une représentation graphique construite au départ de la classique droite numérique, à laquelle on adjoint des éléments non standards qui ne peuvent être aperçus qu'à l'aide d'appareils infiniment puissants. Les nombres limités non standards sont visibles au moyen d'un "microscope infiniment puissant" pointé sur la partie standard correspondante, tandis que les infiniment grands peuvent être repérés à l'aide d'un "téléscope infiniment puissant" pointé vers la droite ou vers la gauche sur la classique droite numérique réelle.

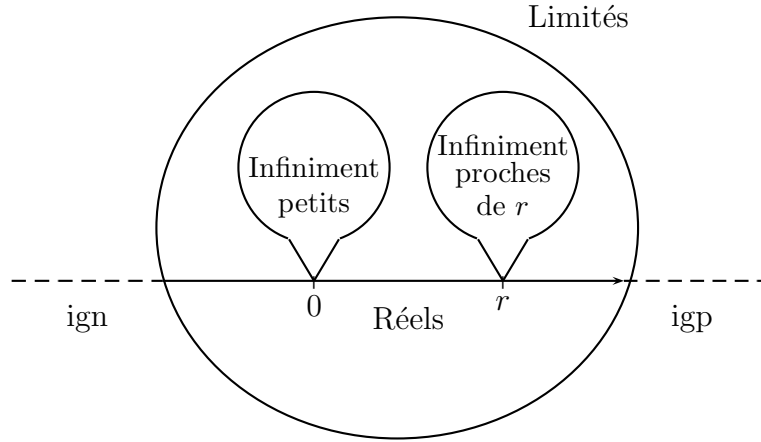


Figure 2.5: La droite hyperréelle

Notons que, de l'unicité de la partie standard, on déduit que les halos de deux réels standards distincts sont toujours disjoints, et que tout nombre non standard appartenant au halo du plus petit des deux réels est strictement inférieur à tout nombre non standard situé dans le halo du plus grand des deux réels.

Comment se comportent les parties standard de limités ?
L'ordre instauré dans ${}^*\mathbb{R}$ conduit aux règles suivantes :

$$\text{st}(*x) < \text{st}(*y) \Rightarrow *x < *y$$

$$*x < *y \Rightarrow \text{st}(*x) \leq \text{st}(*y).$$

La première de ces situations peut être visualisée sur la droite numérique hyperréelle (figure 2.6): si un hyperréel $*x$ est situé dans un halo se trouvant à la gauche du halo contenant l'hyperréel $*y$, alors $*x < *y$:

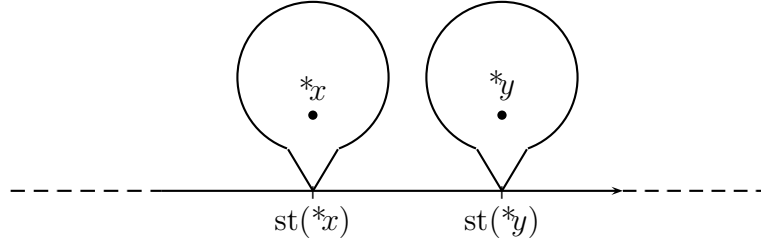


Figure 2.6: $\text{st}(*x) < \text{st}(*y) \Rightarrow *x < *y$

Quant à la seconde implication, insistons sur le fait que l'inégalité de la conclusion n'est pas forcément stricte : pour preuve, si ε est un infiniment petit positif, $0 < \varepsilon$, mais $0 = \text{st}(\varepsilon)$.

Les liens entre les parties standard de limites et les opérations algébriques sont très naturels et attendus :

Proposition 2.2.3 Opérations algébriques et parties standard.

Soient $*x$ et $*y$ deux hyperréels limités.

(a) $*x + *y$, $*x - *y$, $*x \times *y$ sont limités et

- $\text{st}(*x + *y) = \text{st}(*x) + \text{st}(*y)$
- $\text{st}(*x - *y) = \text{st}(*x) - \text{st}(*y)$
- $\text{st}(*x \times *y) = \text{st}(*x) \times \text{st}(*y)$;

(b) si, de plus, $*y$ est appréciable, $\frac{*x}{*y}$ est limité et

- $\text{st}\left(\frac{*x}{*y}\right) = \frac{\text{st}(*x)}{\text{st}(*y)}$.

Preuve. Le caractère limité des divers résultats découle directement des règles de Leibniz (? 2.1).

Pour $*x, *y \in *\mathbb{R}$, il existe ε et δ ip ou nuls tels que $*x = \text{st}(*x) + \varepsilon$ et $*y = \text{st}(*y) + \delta$. En conséquence,

$$*x + *y = \text{st}(*x) + \text{st}(*y) + \varepsilon + \delta$$

et

$$*x \times *y = \text{st}(*x) \times \text{st}(*y) + \varepsilon \times \delta + \varepsilon \times \text{st}(*y) + \delta \times \text{st}(*x).$$

On obtient alors les formules relatives à la partie standard d'une somme et d'un produit en constatant que

$$\varepsilon + \delta$$

et

$$\varepsilon \times \delta + \varepsilon \times \text{st}(*y) + \delta \times \text{st}(*x)$$

sont infiniment petits ou nuls (? 2.2). Par ailleurs, $-*x = -\text{st}(*x) - \varepsilon$, d'où $\text{st}(-*x) = -\text{st}(*x)$ puisque $-\varepsilon$ est infiniment petit ou nul. Enfin, si $*y$ est appréciable, $\frac{1}{*y}$ est un limité dont le produit avec $*y$ est égal à 1, ce qui permet d'écrire

$$\text{st}\left(\frac{1}{*y} \times *y\right) = \text{st}\left(\frac{1}{*y}\right) \times \text{st}(*y),$$

puis

$$\text{st}\left(\frac{1}{*y}\right) = \frac{1}{\text{st}(*y)}$$

et

$$\text{st}\left(\frac{*x}{*y}\right) = \text{st}(*x) \times \text{st}\left(\frac{1}{*y}\right) = \frac{\text{st}(*x)}{\text{st}(*y)} \quad (? 2.3) \blacksquare$$

2.3 Règle d'extension

Vu l'extension des opérations algébriques aux hyperréels, il est possible de calculer la valeur d'un polynôme (à coefficients réels) pour tout hyperréel, ce qui donne ainsi naissance à une fonction définie sur $*\mathbb{R}$ et à valeurs dans $*\mathbb{R}$. Par exemple, le polynôme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2 + x - 2$$

engendre la nouvelle fonction :

$$*f : *\mathbb{R} \rightarrow *\mathbb{R} : *x \rightarrow (*x)^2 + *x - 2;$$

notamment, pour ε infiniment petit positif,

$$*f(2 + \varepsilon) = (2 + \varepsilon)^2 + (2 + \varepsilon) - 2 = \varepsilon^2 + 5\varepsilon + 4;$$

de plus, pour tout nombre hyperréel $*x$ limité, on a, en vertu de la proposition 2.2.3

$$\text{st}(*f(*x)) = *f(\text{st}(*x)) = f(\text{st}(*x))$$

et, en particulier, pour tout réel x :

$$*f(x) = f(x).$$

Cette dernière égalité permet d'affirmer que $*f$ est une *extension naturelle* de f .

Plus généralement, on peut, de la même manière, étendre naturellement les fractions rationnelles et même les fonctions faisant intervenir des racines d'ordre quelconque, sous réserve d'existence bien sûr. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ (resp. $x \mapsto \sqrt{x}$) peut être regardée comme étant définie pour tout hyperréel différent de 1 (resp. pour tout hyperréel non négatif).

Il s'agit à présent de fournir une extension naturelle à toutes les fonctions réelles considérées en analyse classique. Comme les fonctions sont généralement définies sur des intervalles de la droite numérique, nous allons tout d'abord étendre naturellement de tels intervalles au sein des hyperréels.

A un intervalle I quelconque de \mathbb{R} , nous allons associer un "intervalle" $*I$ de $*\mathbb{R}$ de la manière suivante : $*I$ contient

- tous les éléments de I ,
- tous les hyperréels infiniment proches d'un élément de I autre qu'une extrémité de I ,
- tous les hyperréels infiniment proches de et inférieurs (resp. supérieurs) à un réel qui est l'extrémité de droite (resp. de gauche) de I lorsque ce dernier est borné supérieurement (resp. borné inférieurement),
- tous les hyperréels infiniment grands positifs (resp. infiniment grands négatifs) si l'intervalle I n'est pas borné supérieurement (resp. pas borné inférieurement).

Les différents cas possibles sont les suivants pour deux réels a et b tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} * [a, b] &= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x \leq b \} & ; & \quad *]a, b[= \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x < b \} \\ * [a, b[&= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x < b \} & ; & \quad *]a, b] = \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x \leq b \} \\ * [a, +\infty[&= \{ *x \in *\mathbb{R} : a \leq *x \} & ; & \quad *]a, +\infty[= \{ *x \in *\mathbb{R} : a < *x \} \\ *]-\infty, a] &= \{ *x \in *\mathbb{R} : *x \leq a \} & ; & \quad *]-\infty, a[= \{ *x \in *\mathbb{R} : *x < a \} \end{aligned}$$

L'ensemble $*I$ est appelé l'*extension naturelle* de l'intervalle réel I . Ces considérations s'étendent à tout ensemble D qui est la réunion d'intervalles réels : l'extension naturelle $*D$ de D coïncide bien entendu avec la réunion des extensions naturelles des intervalles réels correspondants.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer cette importante règle de l'analyse non standard :

Règle 2.3.1 (Règle d'extension.) Toute fonction réelle f d'une variable, définie sur un intervalle I , admet une extension naturelle, notée (provisoirement) $*f$ définie sur $*I$, dont les valeurs sont des hyperréels et dont la restriction aux réels est f ; cette dernière condition signifie que si r désigne un réel quelconque, $*f$ est définie en r si et seulement si f est définie en r , auquel cas on doit avoir $*f(r) = f(r)$:

$$*f : *I \rightarrow *\mathbb{R} \text{ telle que } *f(r) = f(r) \forall r \in I.$$

Une même règle peut être énoncée pour les fonctions de plusieurs variables.

La fonction f n'est rien d'autre que la restriction de $*f$ à \mathbb{R} . Ainsi, toutes les fonctions élémentaires classiques de l'analyse, à savoir les polynômes, les fractions rationnelles, les racines d'ordre quelconque, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques, les fonctions exponentielles et logarithmiques, ... et plus généralement, toutes les fonctions construites en composant entre elles diverses de ces fonctions s'étendent aux hyperréels.

Un autre exemple, important pour la suite, est celui de la fonction f définie en associant à tout réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x , ce qui se traduit par l'égalité

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

pour tout x réel; les valeurs hyperréelles de l'extension naturelle $*f$ sont appelées les *hyperentiers* : les hyperentiers limités coïncident avec les éléments de l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls, tandis que les hyperentiers non limités sont infiniment grands (positifs ou négatifs).

Les hyperentiers non négatifs sont encore appelés les *hypernaturels* : ils forment l'ensemble noté $*\mathbb{N}$, ce dernier étant obtenu en joignant à l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels l'ensemble des hyperentiers infiniment grands positifs.

2.4 Règle de transfert

Reprenons l'exemple de la fonction polynomiale f considérée dans le paragraphe précédent et définie par $f(x) = x^2 + x - 2$ pour tout réel x . Son extension naturelle $*f$ est définie pour tout hyperréel $*x$ par

$$*f(*x) = (*x)^2 + *x - 2.$$

On a notamment les propriétés suivantes de cette extension :

- $*f(*x) = (*x + 2)(*x - 1)$ pour tout $*x \in *\mathbb{R}$;
- $*f(*x) = 0$ si et seulement si $*x = -2$ ou $*x = 1$;
- $*f(x) \leq 0$ pour tout $*x \in *[-1, 2]$;
- $*f$ est strictement croissante sur $*[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Ainsi, plusieurs propriétés vérifiées par le polynôme f sur \mathbb{R} le sont également par $*f$ sur $*\mathbb{R}$.

Bien plus, il importe de transférer les propriétés classiques de toutes les fonctions réelles à leurs extensions naturelles sur $*\mathbb{R}$.

Plus généralement, toute “proposition standard” qui est vraie dans les réels est également vraie dans les hyperréels ; par exemple, on peut affirmer que, pour tous hyperréels $*x$ et $*y$, les deux formules suivantes sont vraies :

$$\sin(*x + *y) = \sin *x \cos *y + \sin *y \cos *x ; e^{*x+*y} = e^{*x} \cdot e^{*y}.$$

Il existe évidemment beaucoup de formules semblables à étendre dans $*\mathbb{R}$. Pour ne pas devoir les considérer toutes isolément (ce qui est bien entendu impossible), il y a lieu de les caractériser de manière générale, ce qui est possible grâce à la logique mathématique. Sans entrer dans des détails trop techniques, on définit une *proposition standard* comme une proposition composée de *constantes réelles* (a, b, \dots), de *variables réelles* (x, y, \dots), de *symboles logiques* ou *grammaticaux*, à savoir

- les *connectifs* \wedge (et), \vee (ou), \neg (non), \rightarrow (si \dots , alors \dots), les parenthèses ;
- les *quantificateurs* \forall (pour tout) et \exists (il existe),

des symboles de *relation* ($=, <$) et des symboles de fonctions réelles (en ce compris des opérations algébriques $+, -, \cdot, \div$). Nous pouvons maintenant énoncer cette importante règle de l’analyse non standard :

Règle 2.4.1 (Règle de transfert) *Toute proposition standard qui est vraie dans les réels est également vraie dans les hyperréels, pour autant que les variables hyperréelles ($*x, *y, \dots$) soient mises à la place de leurs homologues réelles (x, y, \dots) et que les fonctions réelles soient remplacées par leurs extensions naturelles, et toutes choses égales par ailleurs.*

Une présentation plus formelle de cette règle de transfert ainsi que quelques exemples illustratifs peuvent être consultés en fin de chapitre.

Insistons sur une conséquence importante de cette règle de transfert : celle-ci montre que l’extension de \mathbb{R} à $*\mathbb{R}$ est de nature différente des autres extensions de nombres déjà connues. En effet, lors du passage de \mathbb{N} à \mathbb{Z} , de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} , de \mathbb{Q} à \mathbb{R} , ou encore de \mathbb{R} à \mathbb{C} , le langage est, chaque fois, enrichi en ce sens que des propositions fausses dans l’ensemble “de départ” deviennent vraies dans l’ensemble “d’arrivée”, ainsi qu’en attestent les exemples suivants :

la proposition	est fausse dans	est vraie dans
$\exists x \ x + 1 = 0$	\mathbb{N}	\mathbb{Z}
$\exists x \ 2x + 1 = 0$	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}
$\exists x \ x^2 = 2$	\mathbb{Q}	\mathbb{R}
$\exists x \ x^2 + 1 = 0$	\mathbb{R}	\mathbb{C}

Par contre, les “langages” de \mathbb{R} et de ${}^*\mathbb{R}$ contiennent exactement les mêmes propositions standard vraies par cette règle de transfert.

Cette règle de transfert justifie notamment que nous ne faisons plus de distinction entre les fonctions réelles et leurs extensions naturelles dans ${}^*\mathbb{R}$.

Il convient toutefois de rester vigilant. En effet, la règle de transfert n’est valable que pour les propositions standard et certains résultats (ne pouvant être formulés sous la forme de propositions standards) ne sont plus valables lorsque l’on travaille dans l’ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des hyperréels. C’est le cas, comme nous l’avons déjà vu, du “théorème de la borne atteinte” affirmant que tout sous-ensemble de \mathbb{R} qui est majoré admet un plus petit majorant ², alors que, dans ${}^*\mathbb{R}$, le halo d’un réel standard, par exemple, est majoré mais n’admet pas de plus petit hyperréel majorant. Cet énoncé ne peut en fait être exprimé par une proposition standard, essentiellement car il fait intervenir un ensemble de nombres et pas rien que des nombres.

2.5 Règle de finitude

Bien que tous les théorèmes de l’analyse standard ne puissent pas automatiquement être transférés au sein de ${}^*\mathbb{R}$, de nombreuses propriétés peuvent être étendues aux hyperréels (voir la règle de transfert). Il en va ainsi de certains résultats qui sont évidents pour des suites finies et peuvent être étendus aux *suites hyperfinies*, c’est-à-dire aux suites du type $\{ {}^*x_0, {}^*x_1, {}^*x_2, \dots, {}^*x_\omega \}$ où ω désigne un hypernaturel infiniment grand et dont les éléments x_i sont des hyperréels. Tous les éléments d’une telle suite hyperfinie sont en effet “énumérables” pour une personne qui aurait la possibilité de compter jusqu’aux entiers infiniment grands; il en résulte notamment que toute suite hyperfinie possède un plus petit (resp. un plus grand) élément.

[Formellement, on écrira :

$$\exists j, k \in \{0, 1, \dots, \omega\} : \forall i \in \{0, 1, \dots, \omega\}, {}^*x_k \leq {}^*x_i \leq {}^*x_j.$$

Plus généralement, on dispose de ce principe de finitude [Deledicq - Diener (1989), p. 25] :

Règle 2.5.1 (Règle de finitude) *Soit $P(x)$ une propriété vérifiée pour un élément au moins de la suite hyperfinie $\{ {}^*x_0, {}^*x_1, {}^*x_2, \dots, {}^*x_\omega \}$. Il existe un plus petit indice \bar{i} pour lequel $P({}^*x_{\bar{i}})$ est vraie et aussi un plus grand indice \hat{j} pour lequel $P({}^*x_{\hat{j}})$ est vraie.*]

En analyse, on est souvent amené à diviser un intervalle $I = [a, b]$ de la droite numérique réelle sur lequel l’on travaille en sous-intervalles; si l’on fait appel à une suite

²Un sous-ensemble E de \mathbb{R} est dit majoré lorsqu’il possède un *majorant* r , c’est-à-dire lorsqu’il existe un réel r tel que $x \leq r$ pour tout élément x de E . Dans ce cas, E possède une infinité de majorants, puisque tout nombre supérieur à un majorant en est également un. Le plus petit majorant de E garanti par le théorème en question est unique et s’appelle le *supremum* ou la *meilleure borne supérieure* de E .

finie $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de nombres réels x_j tels que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

l'intervalle I peut être partitionné en n sous-intervalles deux à deux disjoints

$$[x_0, x_1[, [x_1, x_2[, \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}[, [x_{n-1}, x_n];$$

de plus, si tous les n sous-intervalles sont de même longueur, on peut écrire

$$x_j = a + j \times \frac{b - a}{n} \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Une même opération peut être réalisée sur *I en prenant même un nombre hyperentier ω infiniment grand de sous-intervalles de subdivision : en effet, si

$$[{}^*x_{j-1}, {}^*x_j[= \{{}^*x \in {}^*\mathbb{R} : {}^*x_{j-1} \leq {}^*x < {}^*x_j\},$$

les ω sous-intervalles de ${}^*\mathbb{R}$

$$[{}^*x_0, {}^*x_1[, [{}^*x_1, {}^*x_2[, \dots, [{}^*x_{\omega-2}, {}^*x_{\omega-1}[, [{}^*x_{\omega-1}, {}^*x_\omega]$$

partitionnent *I : on parlera dans ce cas de partition hyperfinie de ${}^*[a, b]$. En particulier, on peut partitionner l'intervalle en ω sous-intervalles de même longueur infiniment petite en posant

$${}^*x_j = a + j \times \frac{b - a}{\omega} \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots, \omega.$$

En conséquence, deux hyperréels situés dans un même sous-intervalle sont infiniment proches l'un de l'autre et dès lors, un même sous-intervalle de subdivision contient au plus un réel standard.

2.6 Annexes

2.6.1 Citations historiques

- *L'analyse non-standard ne conteste aucun résultat acquis des mathématiques : elle se borne à introduire une nouvelle notion, la propriété pour tout objet d'être standard ou non. Une façon rapide de définir cette propriété est de ne pas la définir du tout ... mais d'en donner les règles d'utilisation.* [Diener - Diener (1989), p. 70].
- *L'arithmétique des ordres de grandeur est plutôt intéressante. Voyons par exemple l'addition.*

$$1 \text{ méga} + 2 \text{ méga} = 3 \text{ méga}$$

$$5 \text{ milli} - 3 \text{ milli} = 2 \text{ milli}$$

Mais à quoi ressemble la somme

$$3 \text{ méga} + 2 \text{ milli} ?$$

A 3 000 000,002. Quel homme “raisonnable” (le mot juste serait ici “pragmatique”) n’écrirait pas : $3000000,002 \approx 3000000$ (le signe \approx se lit : “à peu près égal à”), ou encore

$$3 \text{ méga} + 2 \text{ milli} \approx 3 \text{ méga}$$

Autrement dit, en additionnant des méga et des milli, on reste dans les méga. La multiplication est assez passionnante. (...) Appelons *i*-grand (en abrégé *i.g.* comme *immensément grand*) ce qui est de l’ordre des kilo, méga, giga, téra, ... , et appelons *i*-petit (en abrégé *i.p.* comme *incroyablement petit*), ce qui est de l’ordre des milli, micro, nano, pico, ... Entre l’*i.p.* et l’*i.g.*, il y a les nombres à l’échelle de l’homme, ceux qui sont proches de un, de l’unité; ils seront notés *u* dans cette table de multiplication simplifiée

\times	<i>i.p.</i>	<i>u</i>	<i>i.g.</i>
<i>i.p.</i>	<i>i.p.</i>	<i>i.p.</i>	?
<i>u</i>	<i>i.p.</i>	<i>u</i>	<i>i.g.</i>
<i>i.g.</i>	?	<i>i.g.</i>	<i>i.g.</i>

Le “?” signifie ceci : Quand on multiplie un *i.p.* par un *i.g.*, le résultat n’est pas a priori prévisible : il faut y regarder de plus près. De telles règles de calcul seront effectivement valables en “Analyse Non Standard”. [Deledicq-Casiro (1997), p. 48].

- Le comportement microscopique sera décrit par des fonctions non standard qui ne pourront être spécifiées, mais dont on pourra connaître suffisamment de propriétés abstraites, et surtout, auxquelles on pourra appliquer toutes les lois de l’arithmétique et du calcul infinitésimal (multiplication, dérivation, etc.). Les règles de calcul de l’ombre donneront alors tout naturellement les lois du comportement macroscopique. Cette forme de raisonnement est le fondement même de la physique théorique qui trouve ainsi la mathématique qu’il lui fallait. Tout cela provient, au fond, du fait que l’ombre est par définition un nombre ou une fonction standard, c’est-à-dire simple. On peut dire que l’analyse non standard fournit une méthode universelle pour dégager le simple du compliqué, qui est évidemment très limitée par la pauvreté de nos moyens, mais non par son principe. [Harthong (1983), p. 1200].
- L’Axiome de Transfert assure la perennité des propriétés classiques. (...) [II] postule que notre manque d’information sur l’inconnu est minimale : ce que nous ne connaissons pas est ainsi entièrement déterminé par ce que nous connaissons ! [Deledicq (1990), pp. 150-152]

2.6.2 Présentation formelle de la règle de transfert

Pour énoncer de façon plus formelle cette règle, constatons que toute question d'analyse fait intervenir des constantes (réelles) et des variables (réelles) dont certaines peuvent dépendre d'autres et qui sont éventuellement reliées entre elles par des égalités ou des inégalités. On appelle formule réelle toute égalité ou inégalité entre deux expressions construites avec des constantes, des variables et des fonctions réelles. Par exemple, avec une fonction f , trois constantes a, b et c , ainsi que les variables x et y , on peut construire les expressions $ax + by + c$ qui donnent naissance notamment aux six formules réelles suivantes :

$$\begin{array}{ll} ax + by + c + f(x) = 0 & ax + by + c + f(x) \neq 0 \\ ax + by + c + f(x) \leq 0 & ax + by + c + f(x) \geq 0 \\ ax + by + c + f(x) < 0 & ax + by + c + f(x) > 0 \end{array}$$

Un système réel est un ensemble fini de formules réelles (il peut ne comporter qu'une seule formule); on note $S(x, y, \dots)$ un tel système dont les variables sont x, y, \dots ; une solution d'un système S comprenant n variables est un point de l'espace numérique \mathbb{R}^n dont les coordonnées vérifient toutes les formules de S .

Par exemple,

$$S(x, y) \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

est un système réel en les variables x et y dont les solutions sont les points, d'abscisse x et d'ordonnée y , situés sur le demi-cercle de rayon unitaire, centré à l'origine et situé dans les premier et deuxième quadrants.

Un système réel $S_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ entraîne un autre système réel S_2 lorsque ce dernier comprend au moins les mêmes variables x_1, x_2, \dots, x_n que S_1 , plus éventuellement d'autres variables y_1, y_2, \dots, y_p et que, pour toute solution $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ de S_1 , il existe des réels $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p$ tels que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p)$ soit une solution de S_2 ; dans le cas particulier où deux systèmes réels S_1 et S_2 ont exactement les mêmes variables, S_1 entraîne S_2 lorsque toute solution de S_1 est également une solution de S_2 . Par exemple, le système

$$S_1(x, y) \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

entraîne les deux systèmes

$$S_2(x, y) \equiv \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{cases} \text{ et } S_3(x, y, z) \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

car toute solution de S_1 détermine, d'une part, un point du graphe de la fonction

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ et, d'autre part, un point de l'espace qui est situé sur la sphère centrée à l'origine et de rayon unitaire (à savoir un point situé dans le plan horizontal de cote nulle).

A tout système réel $S(x, y, \dots)$, on associe, dans ${}^*\mathbb{R}$, un nouveau système en laissant intactes les constantes réelles, en remplaçant les variables réelles x, y, \dots par leurs homologues hyperréelles ${}^*x, {}^*y, \dots$ et les fonctions réelles f, g, \dots par leurs extensions naturelles ${}^*f, {}^*g, \dots$, on obtient de la sorte un système hyperréel associé à $S(x, y, \dots)$ et noté ${}^*S({}^*x, {}^*y, \dots)$. Bien entendu, on peut définir de la même manière que dans \mathbb{R} la solution d'un système hyperréel ainsi que le cas où un système hyperréel en entraîne un autre.

Nous sommes à présent en mesure de présenter formellement la règle de transfert:

Règle 2.6.1 (Règle de transfert) *Si un système réel*

$$S_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

entraîne, dans \mathbb{R} , un système réel

$$S_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_p),$$

alors le système hyperréel

$${}^*S_1({}^*x_1, {}^*x_2, \dots, {}^*x_n)$$

entraîne, dans ${}^\mathbb{R}$, le système hyperréel*

$${}^*S_2({}^*x_1, {}^*x_2, \dots, {}^*x_n, {}^*y_1, {}^*y_2, \dots, {}^*y_p).$$

Illustrons cette règle par quelques exemples typiques.

Exemple. Le système réel

$$S_1(x) \equiv \begin{cases} -1 \leq x \\ x \leq 1 \end{cases}$$

admet pour solutions les points de l'intervalle $I = [-1, 1]$; il entraîne le système

$$S_2(x) \equiv f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

car la fonction f est bien définie sur I . En vertu de la règle de transfert, le système

$${}^*S_1({}^*x) \equiv \begin{cases} -1 \leq {}^*x \\ {}^*x \leq 1 \end{cases}$$

entraîne le système

$${}^*S_2({}^*x) \equiv {}^*f({}^*x) = \sqrt{1 - ({}^*x)^2}.$$

En procédant de cette manière, on peut conclure, plus généralement, que si une fonction réelle f en les variables réelles x, y, \dots est définie sur un ensemble composé des solutions d'un système réel $S(x, y, \dots)$, alors l'extension naturelle $*f$ de f est une fonction en les variables hyperréelles $*x, *y, \dots$ définie sur l'ensemble composé des solutions du système hyperréel $*S(*x, *y, \dots)$. En particulier, si f est une fonction réelle en l'unique variable réelle x et définie sur l'intervalle réel I , alors $*f$ est une fonction hyperréelle définie sur $*I$.

Exemple. Lorsque le système

$$S_1(x) \equiv \begin{cases} -1 \leq x \\ x \leq 1 \end{cases}$$

entraîne le système

$$S_2(x) \equiv f(x) \leq f(0),$$

cela signifie que le point $x = 0$ est un maximant global de la fonction f sur l'intervalle $I = [-1, 1]$. En vertu de la règle du transfert, le point $*x = 0$ est également un maximant global de $*f$ sur $*I$.

Exemple. Le système

$$S_1(x, y) \equiv \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}$$

admet pour solutions tous les points du plan réel \mathbb{R}^2 ; il entraîne le système

$$S_2(x, y) \equiv e^{x+y} = e^x e^y,$$

puisque cette égalité portant sur la fonction exponentielle est vraie pour tous réels x et y . Par la règle du transfert, on a aussi $*f(*x + *y) = *f(*x)*f(*y)$ pour tous hyperréels $*x$ et $*y$, où $*f$ désigne l'extension naturelle de la fonction exponentielle en base e ; en d'autres termes, l'égalité en question sur les puissances du nombre e est également valable dans les hyperréels.

Exemple. Affirmer que le système

$$S_1(x, y) \equiv \begin{cases} a \leq x \\ x < y \\ y \leq b \end{cases}$$

entraîne le système

$$S_2(x) \equiv f(x) \leq f(y)$$

traduit la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. En vertu de la règle du transfert, l'extension naturelle $*f$ de f est également croissante sur $*I$.

Exemple. Le système

$$S_1(x, y) \equiv \begin{cases} x = x \\ f(x) = \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

introduit la fonction f qui, à tout réel x , associe le plus grand entier inférieur ou égal à x . S_1 entraîne le système

$$S_2 = \begin{cases} f(x) + 1 = f(x + 1) \\ f(x) - 1 = f(x - 1) \\ f(x) \leq x < f(x) + 1 \end{cases}$$

Grâce à la règle du transfert, on peut donc affirmer que le successeur (resp. le prédécesseur) de tout entier infiniment grand est également un entier infiniment grand, en particulier le prédécesseur de tout hypernaturel infiniment grand est aussi un hypernaturel infiniment grand, et que tout hyperréel infiniment grand est compris entre un entier infiniment grand et son successeur.

Exemple. Considérons une formule F ne faisant intervenir qu'une variable réelle x . Pour un réel arbitraire r , on dit que cette formule est vérifiée localement en r , ou encore au voisinage de r , lorsqu'il existe (au moins) un intervalle réel ouvert $]a, b[$, avec $a < r < b$, dont tout élément est solution du système réel $S(x)$ composé de l'unique formule F . Grâce à la règle du transfert, on sait alors que tout hyperréel appartenant à $^*]a, b[$ est également solution du système hyperréel $^*S(^*x)$. Il est intéressant de noter qu'il suffit de vérifier le système hyperréel $^*S(^*x)$ en r et en tout point du halo $^*H(r)$ de r pour être certain que le système réel $S(x)$ est vérifié en tout point d'un intervalle ouvert contenant r ; en d'autres termes, une propriété à établir au voisinage de r peut n'être démontrée que dans le halo de r , ce qui s'avère intéressant car le halo est bien déterminé dans $^*\mathbb{R}$, au contraire du voisinage réel qui est inconnu et dont on connaît seulement l'existence.

Preuve. Démontrons ce résultat intéressant en prenant, par exemple pour formule F , une égalité du type $f(x) = 0$ et admettons donc au départ l'hypothèse selon laquelle f s'annule en r tandis que *f s'annule en tout hyperréel de $^*H(r)$. Procédons par l'absurde et supposons que, pour tout réel positif x , il existe un réel y tel que $r - x < y < r + x$ avec $f(y) \neq 0$; dans ces conditions, le système réel $S_1(x)$ formé par l'inégalité $x > 0$ entraîne le système réel

$$S_2(x, y) : \begin{cases} x > 0 \\ r - x < y < r + x \\ f(y) \neq 0 \end{cases}$$

La règle de transfert nous permet d'affirmer que, pour ε infiniment petit positif, on peut trouver un hyperréel *y situé dans $^*H(r)$ tel que $r - \varepsilon < ^*y < r + \varepsilon$ et $^*f(^*y) \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.]

Chapitre 3

Etude de courbes planes

3.1 Introduction

Soit \mathcal{C} une courbe située dans le plan rapporté à un repère orthonormé : c'est l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient une équation du type

$$F(x, y) = 0,$$

où F désigne une fonction à deux variables. Dans un premier temps, nous fixons principalement notre attention sur des fonctions F polynomiales : dans ce cas, la courbe analysée est d'équation

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} x^i y^j = 0,$$

où p et q sont deux entiers positifs ou nuls, tandis que les a_{ij} sont des réels non tous nuls; une telle courbe est qualifiée d'*algébrique* et est dite de *degré* d égal à

$$d = \sup_{a_{ij} \neq 0} (i + j).$$

Citons quelques exemples de courbes algébriques de degré égal à 2, 3 et 4 respectivement.

- Une *conique* d'équation générale (dans laquelle a, \dots, f sont des constantes)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0;$$

un cas particulier est le *cercle* centré en l'origine et de rayon R , d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

- Le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$; en effet, il s'agit d'une *cubique* d'équation

$$y^3 = x.$$

- La *lemniscate de Gérono* définie par

$$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0,$$

Nous allons faire appel à l'*extension naturelle* *C de la courbe C d'équation $F(x, y) = 0$: il s'agit de l'ensemble des points hyperréels ${}^*P = ({}^*x, {}^*y)$ dont les coordonnées hyperréelles vérifient l'équation suivante, qui est obtenue par les règles d'extension et de transfert :

$${}^*F({}^*x, {}^*y) = 0,$$

où *F désigne l'extension naturelle de la fonction F .

Deux problèmes importants seront examinés.

D'une part, nous étudierons le **comportement local** de C au "voisinage" d'un de ses points $P = (r, s)$. A cet effet, nous considérerons les points ${}^*P = ({}^*x, {}^*y)$ qui sont situés sur *C et qui sont *infinitement proches* de P en ce sens que leur distance à P , égale à

$$d({}^*P, P) = \sqrt{({}^*x - r)^2 + ({}^*y - s)^2},$$

est un hyperréel infiniment petit positif. Ces points *P sont bien entendu indiscernables de P à l'oeil nu. C'est pourquoi, à l'instar d'un biologiste qui utilise un microscope pour agrandir de minuscules microbes, nous recourrons à un microscope "virtuel" pour "zoomer" sur la courbe autour du point P et ainsi pouvoir distinguer des points qui sont infiniment proches entre eux.

D'autre part, nous nous pencherons sur le **comportement asymptotique** de C , c'est-à-dire sur la partie de *C comprenant des points *P qui sont *infinitement éloignés* de l'origine O , et donc tels que

$$d(O, {}^*P) = \sqrt{({}^*x)^2 + ({}^*y)^2}$$

est un hyperréel infiniment grand positif. De tels points *P sont évidemment trop loin dans le plan hyperréel pour pouvoir être vus sans matériel adéquat. Aussi, de même qu'un astronome se sert d'un télescope pour observer des planètes lointaines, nous ferons appel à un télescope virtuel de manière à, intuitivement, rapprocher à distance observable les points de *C qui sont infiniment éloignés.

Dans les deux cas, nous verrons que, généralement, la courbe étudiée sera vue sous la forme d'une droite passant par l'origine de l'oculaire de l'appareil (microscope ou télescope) choisi.

3.2 Comportement local

Nous consacrons ce passage à l'étude de la représentation d'une courbe tracée par un ordinateur avec lequel sont réalisés des zooms successifs autour d'un même point.

En guise d'introduction, traitons deux exemples élémentaires. Considérons tout d'abord la parabole d'équation $y = x^2$; elle passe notamment par l'origine $O = (0, 0)$. Demandons à un ordinateur (ou à une calculatrice graphique) de représenter cette courbe lorsque l'abscisse x parcourt des intervalles de plus en plus restreints centrés sur 0. Travaillons, par exemple, sur les intervalles $[-1, 1]$, $[-0.2, 0.2]$, $[-0.1, 0.1]$ et $[-0.01, 0.01]$; les graphiques obtenus sont représentés sur la figure 3.1.

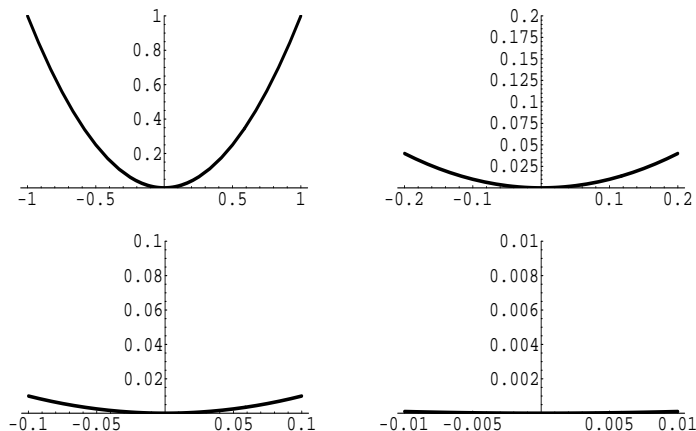


Figure 3.1: Zooms successifs sur la parabole d'équation $y = x^2$ autour de l'origine

Procédons de même avec la parabole d'équation $y = 2x^2$ au voisinage du point $P = (1, 2)$. Des zooms successifs autour de P donnent les résultats de la figure 3.2.

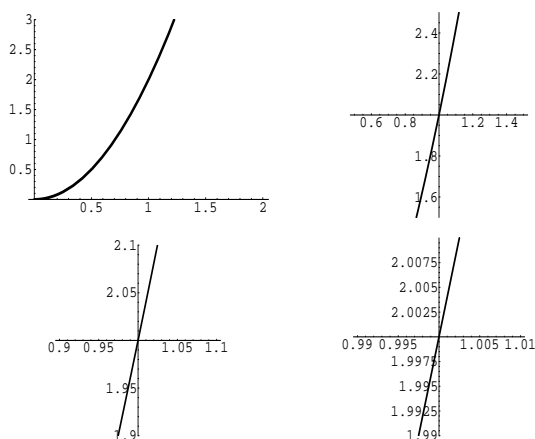


Figure 3.2: Zooms successifs sur la parabole d'équation $y = 2x^2$ autour du point $P = (1, 2)$

Un examen de ces deux cas nous permet d'observer notamment ce phénomène caractéristique : la courbe semble “se rectifier” progressivement pour se présenter finalement sous la forme d'une droite qui ne sera plus modifiée par des zooms ultérieurs.

Pour bien comprendre ce phénomène important, analysons d’abord le mode de fonctionnement de “microscopes virtuels”.

3.2.1 Microscope virtuels

Plaçons-nous en premier lieu sur la droite numérique réelle et considérons un petit intervalle symétrique centré sur l’origine, par exemple $I = [-0.001, 0.001]$: à l’oeil nu, cet intervalle semble réduit à un point, à savoir l’origine de l’axe réel. Par contre, si on multiplie par 1000 tout nombre x de I , les résultats obtenus, notés $X = 1000x$, sont compris entre -1 et 1 et forment dès lors un nouvel intervalle de longueur 2. En d’autres termes,

$$x \in [-0.001, 0.001] \iff X \in [-1, 1].$$

Nous pouvons nous ramener “par translation” à cette situation dans le cas d’un petit intervalle symétrique centré sur un nombre autre que zéro. Par exemple, pour tout nombre $x \in J = [0.999, 1.001]$, $x - 1 \in I$, de sorte que $X = 1000(x - 1) \in [-1, 1]$.

Le processus d’agrandissement peut être illustré par la figure 3.3.

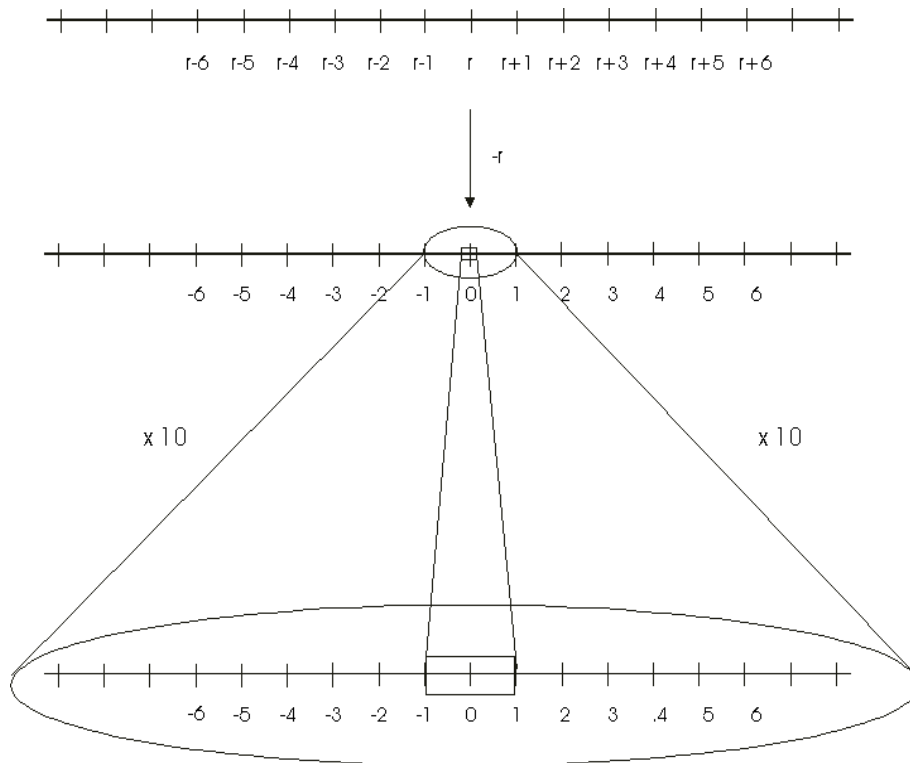


Figure 3.3: Agrandissement d’un petit voisinage de r

Cette idée peut être adaptée, dans le contexte des nombres hyperréels, de manière à visualiser des éléments du halo $H(r)$ d’un réel r . A cet effet, considérons un hy-

perréel ω infiniment grand positif. Imaginons un ω -microscope, c'est-à-dire un microscope qui agrandit ω fois chaque longueur sur la droite numérique réelle. En pointant ce ω -microscope sur le point de la droite numérique représentatif du nombre r , certains éléments de $H(r)$ correspondent maintenant à des points visibles dans l'oculaire et distincts de r . Par exemple, les nombres $r - \frac{1}{\omega}$ et $r + \frac{1}{\omega}$, qui se confondent avec r à l'oeil nu sont vus distinctement dans l'oculaire à une distance unitaire de r .

Plus généralement, dans l'oculaire d'un ω -microscope pointé sur r , un hyperréel $*x$ situé dans $H(r)$ est observable si et seulement si $\omega(*x - r)$ est limité, et $*x$ possède une image distincte de r si et seulement si $\omega(*x - r)$ est appréciable : dans ce cas, l'image de $*x$ dans l'oculaire est éloignée de r d'une distance égale à la valeur absolue de la partie standard de ce nombre $\omega(*x - r)$.

Nous notons $M_\omega(r)$ l'ensemble composé de tous les hyperréels distincts de r et dont l'image dans l'oculaire d'un ω -microscope pointé sur r est observable; en d'autres termes,

$$M_\omega(r) = \{ *x \in {}^*\mathbb{R} : \omega(*x - r) \text{ est limité} \}.$$

Il est facile de voir que $M_\omega(r)$ est strictement inclus dans $H(r) \cup \{r\}$; par exemple,

$$r + \frac{1}{\omega^2} \text{ et } r - \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

sont dans $H(r)$, mais, dans l'oculaire du ω -microscope, $r + \frac{1}{\omega^2}$ est indiscernable de r car sa distance à r est, dans le nouveau repère, égale à $\frac{1}{\omega}$ et est infiniment petite, tandis que $r - \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ est "infiniment éloigné" de r et en conséquence non visible puisque sa distance, dans le nouveau repère, est alors égale à $\sqrt{\omega}$ et est infiniment grande.

Ainsi, grâce au ω -microscope, dans l'oculaire pointé sur r , tout hyperréel $*x$ de $M_\omega(r)$ est transformé en

$$*X = \omega(*x - r);$$

ce nombre est toutefois vu à l'abscisse nouvelle X qui est la partie standard de $*X$. Par exemple, le nombre $*x = r + \frac{2-\varepsilon}{\omega}$, où ε est un infiniment petit positif, est vu, dans l'oculaire, à deux unités de longueur portées sur la droite du point r .

Modélisation 5 : microscope infiniment puissant

La considération d'un ω -microscope permet de modéliser certaines pratiques courantes consistant à effectuer des calculs approchés. Ainsi, quand un ingénieur ou un économiste étudie une variation très petite ε d'une grandeur et considère alors comme négligeables des expressions de la forme $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$, il assimile en fait le réel ε à un hyperréel infiniment petit positif et, par la pensée, observe le phénomène considéré dans l'oculaire d'un $\frac{1}{\varepsilon}$ -microscope.

Des considérations semblables peuvent être émises dans le plan en appliquant un microscope infiniment puissant à chacune des deux coordonnées des points.

Fixons notre attention sur un point standard, c'est-à-dire un point à coordonnées standard, $P = (r, s)$ et appelons *halo* de P l'ensemble, noté $H(P)$, de tous les points de ${}^*\mathbb{R}^2$ qui sont infiniment proches de P ; à l'oeil nu, tous les points de $H(P)$ se confondent avec P . Essayons d'en distinguer certains en utilisant un ω -microscope pointé sur P , avec ω un hyperréel infiniment grand positif. Cet ω -microscope agrandit ω fois chaque longueur sur chacun des deux axes de coordonnées. Concentrons notre attention sur les points de ce que nous noterons $M_\omega(P)$, à savoir l'ensemble

$$M_\omega(r) \times M_\omega(s);$$

en effet, le ω -microscope pointé sur P fournira de tout point de $M_\omega(P)$ une image observable.

D'un point de vue plus formel, l'utilisation d'un ω -microscope dirigé sur le point $P = (r, s)$ de \mathbb{R}^2 consiste à transformer tout point hyperréel ${}^*P = ({}^*x, {}^*y)$ situé dans $M_\omega(P)$ en un point du plan muni d'un nouveau repère; de façon plus précise, on introduit une application notée \mathcal{M}_ω^P (pour microscope de puissance ω pointé sur P), définie sur $M_\omega(P)$ par

$$\mathcal{M}_\omega^P : ({}^*x, {}^*y) \in M_\omega(P) \mapsto ({}^*X, {}^*Y) \in {}^*\mathbb{R}^2$$

avec

$$\begin{aligned} {}^*X &= \omega({}^*x - r) \Leftrightarrow {}^*x = r + \frac{{}^*X}{\omega} \\ {}^*Y &= \omega({}^*y - s) \Leftrightarrow {}^*y = s + \frac{{}^*Y}{\omega}; \end{aligned}$$

dans les faits, on observe toutefois, comme image de ${}^*P = ({}^*X, {}^*Y)$, le point dont les nouvelles coordonnées X et Y sont des nombres réels égaux à la partie standard de *X et de *Y respectivement.

En guise d'exemple, prenons le point $P = (1, 2)$, ainsi que le point ${}^*P = \left(1 + \frac{2+\varepsilon}{\omega}, 2 + \frac{1-\varepsilon}{\omega}\right)$ pour ω infiniment grand positif et ε infiniment petit positif : on a évidemment $P \approx {}^*P$, de sorte que les deux points semblent à première vue confondus; par contre, dans l'oculaire du microscope \mathcal{M}_ω^P , l'image de P coïncide avec l'origine du nouveau repère tandis que celle de *P apparaît au point $(2, 1)$

3.2.2 Tangente à une courbe

Comme exemple introductif, considérons la parabole \mathcal{C} d'équation $y = 2x^2$ dans l'oculaire d'un microscope \mathcal{M}_ω^P , dirigé vers le point $P = (1, 2)$ et dont la puissance est l'infiniment grand ω . Par les règles d'extension et de transfert, on peut caractériser l'extension naturelle ${}^*\mathcal{C}$ au moyen de l'égalité ${}^*y = 2({}^*x)^2$. L'application du microscope \mathcal{M}_ω^P correspond au passage des anciennes coordonnées ${}^*x, {}^*y$ aux nouvelles ${}^*X, {}^*Y$ définies par

$${}^*X = \omega({}^*x - 1) \Leftrightarrow {}^*x = 1 + \frac{{}^*X}{\omega} \text{ et } {}^*Y = \omega({}^*y - 2) \Leftrightarrow {}^*y = 2 + \frac{{}^*Y}{\omega}.$$

On obtient de la sorte

$$2 + \frac{{}^*Y}{\omega} = 2 \left(1 + \frac{{}^*X}{\omega} \right)^2 \iff {}^*Y = 4 {}^*X + 2 \frac{{}^*X^2}{\omega}.$$

Bien entendu, les seuls points de cette courbe qui peuvent être observés dans l'oculaire du microscope ont des coordonnées *X et *Y limitées; de plus, la partie observable de cette courbe comprend les points de coordonnées X et Y qui sont respectivement les parties standards de *X et *Y ; comme $\frac{{}^*X^2}{\omega}$ est infiniment petit, on obtient dès lors

$$Y = 4X$$

ou encore, en repassant aux coordonnées de départ,

$$y - 2 = 4(x - 1);$$

il s'agit en réalité de la *tangente* à la parabole au point P considéré.

En adaptant le raisonnement ci-dessus, de nombreux exemples similaires peuvent être aisément construits.

Ces considérations nous amènent à donner une définition à la fois générale, rigoureuse et intuitive de la tangente à une courbe.

Définition 3.2.1 Une courbe \mathcal{C} , admet une (demi-)tangente en un point $P = (r, s)$ si, quel que soit ω infiniment grand positif, la partie standard de l'image de \mathcal{C} dans l'oculaire de \mathcal{M}_ω^P est une (demi-)droite dont une équation s'écrit

$$aX + bY = 0,$$

avec $X = st({}^*X)$ et $Y = st({}^*Y)$. Dans ce cas, une équation de la tangente s'écrit

$$a(x - r) + b(y - s) = 0.$$

Illustrons cette définition en considérant la lemniscate de Geronno \mathcal{C} d'équation

$$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0.$$

Pointons tout d'abord un microscope de puissance infiniment grande ω sur le point $P_1 = (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ qui appartient à cette courbe. L'image de ${}^*\mathcal{C}$ par $\mathcal{M}_\omega^{P_1}$ est définie par

$$\left(1 + \frac{{}^*X}{\omega} \right)^4 - 4 \left(1 + \frac{{}^*X}{\omega} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{{}^*Y}{\omega} \right)^2 = 0.$$

Développons le premier membre sachant que les termes indépendants vont s'éliminer et que les termes contenant en dénominateur une puissance de ω d'exposant au moins égal

à 2 sont regroupés dans le reste “... ” : il suffit donc de n’écrire que les termes en $\frac{1}{\omega}$, ce qui donne

$$\frac{4^*X}{\omega} - \frac{8^*X}{\omega} + \frac{4\sqrt{3}^*Y}{\omega} + \dots = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par ω , puis en prenant la partie standard, on obtient, avec des notations introduites antérieurement, la droite d’équation

$$-X + \sqrt{3}Y = 0 ;$$

le point P_1 est dit *régulier* pour \mathcal{C} : la tangente en ce point est unique et d’équation

$$-(x-1) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Dirigeons à présent un microscope de puissance ω sur le point $P_2 = (0,0)$. L’image de $^*\mathcal{C}$ par le microscope $\mathcal{M}_\omega^{P_2}$ est fournie par l’égalité

$$\frac{^*X^4}{\omega^4} - 4\frac{^*X^2}{\omega^2} + 4\frac{^*Y^2}{\omega^2} = 0.$$

Partant, la courbe réellement observée est définie par

$$X^2 = Y^2.$$

Le point P_2 est dit *singulier* pour \mathcal{C} : il s’agit d’un “noeud” où la courbe possède deux tangentes, à savoir les deux droites définies, dans le repère initial, par

$$y = x \text{ et } y = -x.$$

La figure 3.4 illustre la méthode du microscope virtuel appliquée à la lemniscate au point P_2 .

Comme autre exemple, appliquons le microscope $\mathcal{M}_\omega^{(0,0)}$ à la cubique d’équation

$$y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y^3 = x.$$

Par les règles d’extension et de transfert, on peut écrire

$$\left(\frac{^*Y}{\omega}\right)^3 = \frac{^*X}{\omega} \Leftrightarrow \frac{^*Y^3}{\omega^2} = ^*X,$$

d’où l’on déduit $X = 0$ pour $X = \text{st}(^*X)$. Ainsi, l’axe des ordonnées est une tangente verticale de cette cubique à l’origine.

3.3 Comportement asymptotique

Pour étudier le comportement asymptotique d’une courbe, nous adopterons un raisonnement assez semblable à celui suivi pour l’étude du comportement local, mais en recourant non plus à un microscope mais à un télescope virtuel.

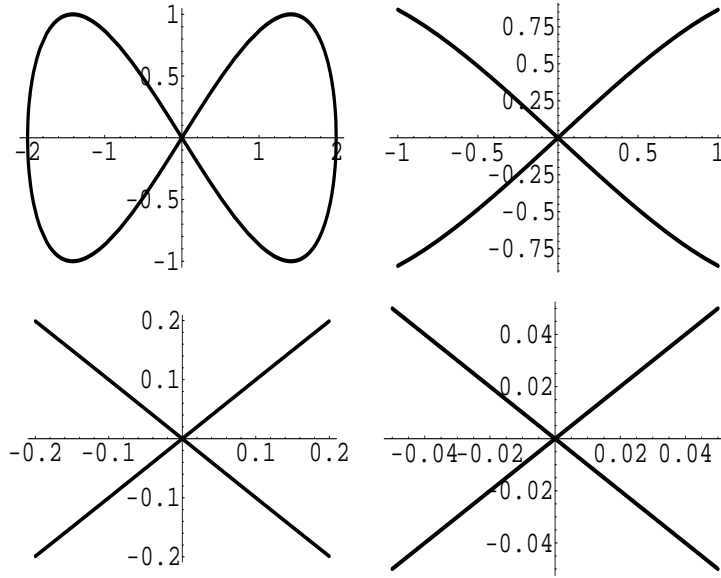


Figure 3.4: “Zooms” successifs sur la courbe d’équation $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$

3.3.1 Télescopes virtuels

En premier lieu, considérons un nombre tellement grand qu’il ne peut être représenté sur l’axe numérique muni d’une unité raisonnable, par exemple $x = 1000$. Il peut être ramené à une distance visible par un changement d’échelle sur l’axe; ainsi, le nombre $X = \frac{x}{1000}$ correspond au point d’abscisse unitaire sur le nouvel axe des nombres initiaux divisés par 1000.

De la même manière, un nombre hyperréel infiniment grand positif $*x = \omega$ devient appréciable, égal à 1, par le changement de variable $*X = \frac{*x}{\omega}$.

Ce procédé peut être utilisé dans le plan hyperréel pour observer certains points infiniment éloignés : en divisant chacune de leurs coordonnées par un nombre infiniment grand positif, on peut obtenir des nombres limités. Formellement, on utilise alors un ω -téléscope qui est une application, notée \mathcal{T}_ω et définie par

$$\mathcal{T}_\omega : (*x, *y) \mapsto (*X, *Y)$$

avec

$$*X = \frac{*x}{\omega} \Leftrightarrow *x = \omega *X \text{ et } *Y = \frac{*y}{\omega} \Leftrightarrow *y = \omega *Y.$$

Par exemple, pour ω infiniment grand positif et ε infiniment petit positif, le point

$$*P = (\omega + 1, 3\omega - \varepsilon)$$

est infiniment éloigné, mais son image par le ω -téléscope est le point

$$\mathcal{T}_\omega(*P) = \left(1 + \frac{1}{\omega}, 3 - \frac{\varepsilon}{\omega}\right),$$

dont la partie standard, donc visible, est le point $(1, 3)$.

3.3.2 Directions asymptotiques et asymptotes

Pour étudier des points infiniment éloignés situés sur une courbe plane, ou plus exactement sur son extension naturelle, un télescope infiniment puissant peut donc être utilisé.

En guise d'exemple, considérons le *folium de Descartes* \mathcal{C} d'équation

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Une équation de son extension naturelle ${}^*\mathcal{C}$ est fournie par les règles d'extension et de transfert, à savoir

$$({}^*x)^3 + ({}^*y)^3 = 3 {}^*x {}^*y;$$

son image par un ω -télescope, pour ω infiniment grand, est composée des points de coordonnées hyperréelles *X et *Y telles que

$$\omega^3 ({}^*X)^3 + \omega^3 ({}^*Y)^3 = 3\omega^2 {}^*X {}^*Y \Leftrightarrow ({}^*X)^3 + ({}^*Y)^3 = \frac{3 {}^*X {}^*Y}{\omega}.$$

Si *X et *Y sont limités, le second membre est infiniment petit et l'on peut écrire, en désignant par X et Y les parties standards de *X et *Y respectivement :

$$X = -Y.$$

Il s'agit de l'équation d'une droite passant par l'origine du nouveau repère : sa direction est qualifiée d'*asymptotique* parce que la courbe possède des points infiniment éloignés dans cette direction.

De nombreux exemples semblables peuvent être construits, ce qui nous amène à introduire cette définition générale.

Définition 3.3.1 *Soit \mathcal{C} une courbe plane. Si, quel que soit ω infiniment grand, la partie standard de l'image de ${}^*\mathcal{C}$ dans l'oculaire du ω -télescope est d'équation*

$$aX + bY = 0,$$

cette droite passant par l'origine est une direction asymptotique de \mathcal{C} .

Notons que si nous trouvons une direction asymptotique \mathcal{D} d'équation $Y = mX$, toute droite d'équation $y = mx + p$ dans le plan initial paraît admettre, dans le nouveau repère, la même image par \mathcal{T}_ω , puisque $\frac{p}{\omega}$ est infiniment petit. En d'autres termes, des points infiniment éloignés sur la courbe ${}^*\mathcal{C}$ peuvent être infiniment proches de points situés sur une parallèle de \mathcal{D} , mais l'on ignore à quelle ordonnée se passe alors ce phénomène. Ainsi, comme pour la détermination d'une tangente, il s'agit dans ce cas de translater la droite

vue dans l'oculaire, mais il n'y a pas ici de point de tangence connu permettant de préciser exactement quelle translation doit être effectuée.

Reprenons l'exemple du folium de Descartes. Nous pouvons chercher un réel p tel que la droite d'équation $y = -x + p$ possède des points infiniment éloignés, mais infiniment proches de (l'extension naturelle de) la courbe. En d'autres termes, nous recherchons un réel p tel que, pour ω infiniment grand, le point $(\omega, -\omega + p)$ soit infiniment proche d'un point de $^*\mathcal{C}$, ce qui se produit lorsqu'il existe un infiniment petit ou nul ε tel que

$$\omega^3 + (-\omega + p + \varepsilon)^3 = 3\omega(-\omega + p + \varepsilon);$$

des calculs élémentaires montrent que $p = -1$.

Ceci nous amène à donner cette définition générale.

Définition 3.3.2 *Une droite d'équation $y = mx + p$ est dite asymptote à une courbe \mathcal{C} d'équation $F(x, y) = 0$ si, pour tout ω infiniment grand, il existe deux réels m et p , ainsi qu'un infiniment petit ε tels que*

$$F(\omega, m\omega + p + \varepsilon) = 0.$$

Dans la pratique, on détermine d'abord une direction asymptotique dont le coefficient angulaire fournit le paramètre m intervenant dans l'équation d'une éventuelle asymptote; puis, on recherche l'ordonnée à l'origine p . Signalons toutefois la possibilité d'avoir une direction asymptotique, mais aucune asymptote comme en témoigne le cas de la courbe d'équation $y^2 - x = 0$: l'axe des abscisses est une direction asymptotique (avec $m = 0$), alors que cette parabole ne possède aucune asymptote.

Par ailleurs, la recherche d'une asymptote peut s'effectuer en une seule étape lorsque la courbe étudiée est le graphe d'une fonction f à une seule variable. En effet, si l'on peut trouver deux réels m et p tels que, pour tout ω infiniment grand, $f(\omega)$ est infiniment proche ou égal à $m\omega + p$, alors la droite d'équation

$$y = mx + p$$

est une asymptote. Cette situation est rencontrée lorsque la fonction f est définie par

$$f(x) = mx + p + g(x),$$

avec $g(\omega)$ infiniment petit pour tout ω infiniment grand; c'est notamment le cas pour toute fonction rationnelle dont le degré du numérateur dépasse d'une unité celui du dénominateur : le résultat d'une division euclidienne permet d'écrire une équation d'une asymptote non verticale.

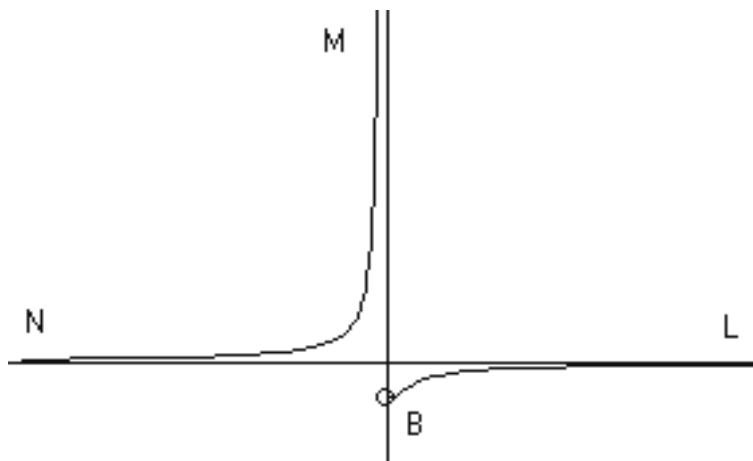
Formulons encore deux remarques.

- Le cas de la direction asymptotique verticale se traite comme ci-dessus en échangeant les rôles des deux coordonnées; il en va ainsi, par exemple, pour la parabole d'équation $y = x^2$.
- Par ailleurs, dans le cas de courbes non algébriques, il convient parfois de distinguer les cas où ω est infiniment grand positif ou infiniment grand négatif.

3.4 Annexes

3.4.1 Citations historiques

- Une ligne courbe peut être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites chacune infiniment petite ou ce qui est la même chose comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit (l'Hospital, cité par Gaud D. - Guichard J. - Sicre J.P. - Chrétien C., 1998, p. 111).
- S'ils ne peuvent comprendre que des parties si petites, qu'elles nous sont imperceptibles, puissent être autant divisées que le firmament, il n'y a pas de meilleur remède que de les leur faire regarder avec des lunettes qui grossissent cette pointe délicate jusqu'à une prodigieuse masse (Pascal, p. 30)
- La courbe qui a pour équation $y+1 = a^{-1/x}$, a désignant un nombre positif plus grand que 1, est formée de deux branches BL , MN , dont la première a pour asymptote, dans le sens des abscisses positives, l'axe même des x , et s'arrête brusquement au point B , dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = -1$; tandis que la seconde branche a pour asymptotes l'axe des y dans le sens des y positifs, et l'axe des x dans le sens des x négatifs. En effet, tant que x est positif, la fonction $a^{-1/x} = \frac{1}{a^{1/x}}$ va en décroissant indéfiniment pour des valeurs de x de plus en plus petites, et finalement s'évanouit avec x , tandis qu'elle tend à devenir égale à l'unité pour des valeurs de x de plus en plus grandes. Au contraire, lorsque x passe par des valeurs négatives, la même fonction croît au delà de toutes limites pour des valeurs numériques de x de plus en plus petites, au lieu qu'elle tend encore à devenir égale à l'unité pour des valeurs numériques de x de plus en plus grandes.



On appelle “point d’arrêt” ceux où une branche de courbe, transcendante ou empirique, s’arrête ainsi brusquement. Si deux branches disjointes, NM , $M'N'$, avaient une ordonnée commune PMM' , en sorte que la fonction représentée par l’ordonnée de la courbe passât brusquement de la valeur PM à la valeur PM' , les points M , M'

seraient des “points de rupture”. Les fonctions algébriques, ne pouvant avoir de points d’arrêt, ne peuvent avoir de points de rupture, ni par conséquent éprouver d’autres solutions de continuité que celles qui proviennent du passage à l’infini; au lieu que les fonctions transcendantes peuvent être sujettes aux solutions de continuité qui proviennent du passage brusque d’une valeur finie à une autre. [Cournot (1841), pp. 28-29].

3.4.2 Limites et asymptotes

La théorie des asymptotes pour le graphe d’une fonction f à une variable est présentée classiquement en termes de *limites*.

Passons brièvement en revue les différents cas possibles obtenus en distinguant les asymptotes verticales, horizontales et obliques.

- **Asymptotes verticales.** Si pour tout ε infiniment petit (resp. infiniment petit positif ; infiniment petit négatif) et pour un réel a , $f(a + \varepsilon)$ est un infiniment grand positif, on dit que la fonction f possède la *limite infinie* $+\infty$ lorsque la variable x tend vers a (resp. tend vers a par valeurs supérieures ; tend vers a par valeurs inférieures), ce qui se note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.)$$

De même, si $f(a + \varepsilon)$ est un infiniment grand négatif et non pas un infiniment grand positif, alors la fonction f possède la *limite infinie* $-\infty$ lorsque la variable x tend vers a (resp. tend vers a par valeurs supérieures ; tend vers a par valeurs inférieures), ce qui se note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a^-} = -\infty.)$$

Dans tous ces cas, la droite d’équation $x = a$ est une asymptote verticale pour le graphe de f .

- **Asymptotes horizontales.** Si pour tout ω infiniment grand positif (resp. infiniment grand négatif), $f(\omega)$ est infiniment proche ou égal au réel a , on dit que la fonction f possède la *limite (finie)* a lorsque la variable x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$), ce qui se note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.)$$

Dans ces conditions, la droite d’équation $y = a$ est une asymptote horizontale pour le graphe de f .

- **Asymptotes obliques.** Pour deux réels m et p , avec $m \neq 0$ ¹, la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique pour le graphe de f lorsque, pour tout ω infiniment grand positif (resp. infiniment grand négatif), $f(\omega)$ est infiniment proche ou égal à $m\omega + p$; dans ce cas, on dit que *la limite de $[f(x) - (mx + p)]$ est égale à 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)*, ce qui se note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0 \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0.)$$

¹Le cas où $m = 0$ se ramène à celui d'une asymptote horizontale.

Chapitre 4

Continuité

4.1 Définitions et exemples

Considérons un polynôme de degré n (entier positif) et à coefficients réels : sa forme générale est donnée par

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}$$

pour tout réel x . Fixons notre attention sur un réel arbitraire r : le polynôme P_n y prend la valeur (réelle) $P_n(r) = \sum_{j=0}^n a_j r^{n-j}$. Regardons comment se comporte l'extension naturelle de P_n en tout hyperréel *x appartenant au halo $H(r)$ de r : l'hyperréel

$$P_n({}^*x) = \sum_{j=0}^n a_j ({}^*x)^{n-j}$$

est égal à ou infiniment proche de $P_n(r)$ puisque $\text{st}(P_n({}^*x)) = P_n(r)$ (? 4.1).

Plus généralement, pour une fonction algébrique f définie sur un intervalle I , on peut vérifier cette propriété (? 4.2) :

$$\text{Si } r \in I, {}^*x \in {}^*I \text{ et } {}^*x \approx r, \text{ alors } f({}^*x) \approx f(r). \quad (4.1)$$

Une telle propriété est très fréquente dans la pratique. Toutefois, elle peut être en défaut pour certaines fonctions non algébriques comme en attestent de nombreux exemples. Ainsi, la fonction f définie par

$$f(x) : x \rightarrow \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

et la fonction $g : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$, toutes deux définies sur \mathbb{R} , ne vérifient pas la propriété (4.1) en $r = 1$ pour f et en toute valeur entière pour g (? 4.3). Il en va de même pour toute fonction étagée, par exemple celle qui donne un tarif postal.

La propriété (4.1) porte le nom de **continuité**. Intuitivement, elle signifie que, dès que la variable pénètre dans le halo de r , les valeurs de f semblent se stabiliser puisque leurs valeurs observables coïncident avec le nombre réel $f(r)$; de la sorte, tout point $({}^*x, f({}^*x))$, autre que $(r, f(r))$, du graphe de l'extension naturelle de f est situé dans $H(r, f(r)) \cup \{(r, f(r))\}$ lorsque ${}^*x \in H(r)$.

Plus rigoureusement, cette notion se définit comme suit.

Définition 4.1.1 (Continuité et discontinuité). *Soient f une fonction définie sur un domaine D et r un réel appartenant à D . La fonction f est continue en r si la valeur de l'extension naturelle de f en tout hyperréel *x infiniment proche de r et appartenant à *D est elle-même infiniment proche de $f(r)$ ou coïncide avec $f(r)$. En termes équivalents, f est continue en r si*

$$\forall {}^*x \in H(r) \cap {}^*D, \text{st}(f({}^*x)) = f(\text{st}({}^*x)) = f(r).$$

Bien entendu, la fonction f est discontinue en r si elle n'y est pas continue, ce qui a lieu si f n'est pas définie en r ou encore s'il existe un hyperréel *x de $H(r) \cap {}^*D$ tel que $\text{st}(f({}^*x)) \neq f(r)$.

Les exemples ci-dessus montrent qu'il est possible d'avoir des fonctions partout définies, mais non partout continues. Il est même possible de construire des fonctions définies pour tout réel et discontinues en tout point. Ainsi, la fonction d , dite de Dirichlet, qui à tout réel x associe

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

n'est nulle part continue. En effet, soit r un réel quelconque; pour tout réel x positif, il existe un réel y tel que

$$|r - y| < x \text{ et } |d(r) - d(y)| = 1;$$

par la règle de transfert, pour tout ${}^*x = \varepsilon$ infiniment petit positif, on peut trouver un hyperréel *y tel que

$$|r - {}^*y| < \varepsilon \text{ et } |d(r) - d({}^*y)| = 1.$$

Ainsi, *y est infiniment proche de r mais tel que $\text{st}(d({}^*y)) \neq d(r)$.

Cette définition de la continuité en un réel peut s'étendre dans un intervalle réel I : il suffit de considérer l'extension naturelle de f dans *I .

Définition 4.1.2 (Continuité sur un intervalle.) *Une fonction f est continue sur un intervalle réel I si f est définie dans I et si, pour tout réel r de I et tout hyperréel *x de *I ,*

$${}^*x \approx r \Rightarrow \text{st}(f({}^*x)) = f(r).$$

On note $C_0(I)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur I .

Exemples. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est un élément de $C_0([0, +\infty[)$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto [x]$ est notamment continue sur $]0, 1[$ et même sur $[0, 1[$, mais pas sur $]0, 1]$ ni sur $[0, 1]$.

4.2 Opérations et continuité

Dans les modèles mathématiques exploités dans la pratique, il est généralement fait appel à des fonctions construites au moyen de diverses opérations portant sur des fonctions élémentaires: celles-ci peuvent en effet être assemblées entre elles de diverses manières, essentiellement par des opérations algébriques ou par le produit de composition.

Proposition 4.2.1 (Opérations algébriques et continuité.) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et a une constante réelle. Les fonctions*

$$f + g, f - g, f \times g, a.f, |f| \text{ et, si } n \text{ est un entier naturel impair, } \sqrt[n]{f}$$

sont continues sur I ; si $g(x) \neq 0$ pour tout x de I , $\frac{f}{g}$ est continue sur I ; si $f(x) \geq 0$ pour tout x de I et si n est un entier naturel pair, $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I .

Preuve. Cet énoncé découle directement des règles correspondantes sur les parties standard. Contentons-nous, en guise d'exemple, de détailler la règle relative au produit. Pour $r \in I$, $*x \in *I$ avec $*x \approx r$, on a

$$\text{st}(f(*x) \times g(*x)) = \text{st}(f(*x)) \times \text{st}(g(*x)) = f(r) \times g(r).$$

Les autres cas se traitent semblablement (? 4.4). ■

Toutes les fonctions élémentaires classiques de l'Analyse sont continues en tout point où elles sont définies. Nous avons déjà montré cet énoncé pour les polynômes et même pour les fonctions algébriques, en particulier, pour les fonctions constantes.

Proposition 4.2.2 (Continuité de fonctions élémentaires.) *Les fonctions “sinus”, “cosinus” et “exponentielle en base a ” sont continues en tout réel. La fonction “logarithme en base a ” est continue en tout réel positif.*

Preuve. Démontrons la proposition relative à la fonction “sinus”, les autres seront laissées à titre d'exercices. Considérons tout d'abord un hyperréel infiniment petit ε et un réel r quelconques. La règle de transfert appliquée à une formule de trigonométrie permet d'écrire:

$$\sin(r + \varepsilon) - \sin(r) = 2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{r + \varepsilon}{2}\right).$$

De plus, si nous supposons ε infiniment petit positif (le cas négatif se traite de manière parfaitement analogue), on a

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon < s, \forall s \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ \Leftrightarrow 0 < \sin \varepsilon < \sin s, \forall s \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ \Leftrightarrow 0 < \sin \varepsilon < R, \forall R \in]0, 1] \end{aligned}$$

ce qui implique que $\sin \varepsilon$ est un hyperréel infiniment petit positif. Comme $\cos(\frac{r+\varepsilon}{2})$ est limité (? 4.6), on obtient que

$$\sin(r + \varepsilon) \cong \sin r \text{ (?4.7). } \blacksquare$$

En conséquence, toute fonction construite au moyen d'opérations algébriques portant sur des fonctions élémentaires est continue pour autant qu'elle soit définie; par exemple, toute fonction rationnelle (qui est le quotient de deux polynômes) est continue sauf aux racines éventuelles du dénominateur.

Assez souvent, on construit des fonctions en combinant entre elles des expressions algébriques de fonctions élémentaires : on dispose alors de cette importante règle de continuité :

Proposition 4.2.3 (Continuité du produit de composition). *Si f est une fonction continue sur un intervalle I , g une fonction continue sur un intervalle J avec $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$, alors le produit de composition $g \circ f$ est continu sur I .*

Preuve. D'après la règle de transfert, on sait que $f(*x) \in *J$ dès que $*x \in *I$ (? 4.8). Soit alors $r \in I, *x \in *I$ avec $*x \approx r$. Par continuité de f , $f(*x) \cong f(r)$. Or, $f(*x) \in *J$ et $f(r) \in J$; par la continuité de g cette fois, on obtient

$$\text{st}(g[f(*x)]) = g[f(r)],$$

d'où la conclusion. \blacksquare

Exemple. La fonction $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est continue sur $I = [0, 1]$ car la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ est partout continue et prend des valeurs positives ou nulles dans I , tandis que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $J = [0, +\infty[$.

4.3 Propriétés fondamentales de la continuité

La propriété la plus importante de la continuité d'une fonction f dans un intervalle I se traduit par le fait que le graphe de f ne possède pas de "trou", ce qui implique que f prend toutes les valeurs intermédiaires entre deux valeurs quelconques; elle fait l'objet du théorème suivant, appelé le théorème des valeurs intermédiaires (TVI en abrégé) :

Théorème 4.3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires de Bolzano.) *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = r$; en termes équivalents, $f([a, b])$ est un intervalle de \mathbb{R} .*

Interprétation géométrique. Dans les hypothèses du théorème, le graphe de f , parcouru du point $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$ rencontre l'horizontale de hauteur r (c'est-à-dire la droite d'équation $y = r$). L'illustration se trouve sur la figure 4.1

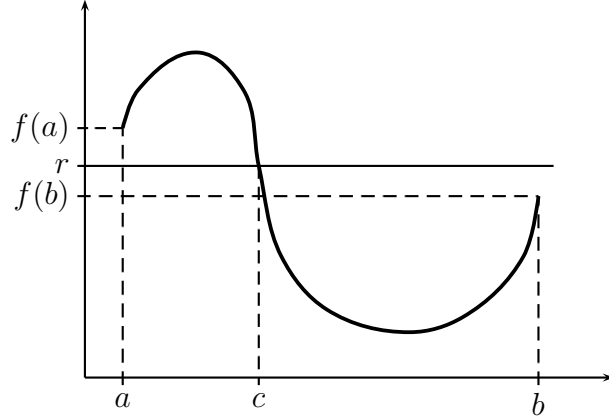


Figure 4.1: Illustration du théorème des valeurs intermédiaires

Preuve. Nous pouvons supposer que $f(a) < r < f(b)$ (? 4.9). Considérons une partition hyperfinie de $^*[a, b]$ construite au moyen des points de subdivision

$$^*x_j = a + \frac{j}{\omega} \times (b - a),$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots, \omega$, où ω désigne un entier infiniment grand positif. En vertu du principe de finitude, il existe un plus grand indice \hat{j} de la suite hyperfinie $\{0, 1, \dots, \omega\}$ tel que

$$f\left(a + \frac{\hat{j}}{\omega} \times (b - a)\right) < r;$$

\hat{j} diffère de ω et on a

$$f\left(a + \frac{\hat{j} + 1}{\omega} \times (b - a)\right) \geq r \quad (? 4.10).$$

Désignons par c la partie standard du nombre limité $a + \frac{\hat{j}}{\omega} \times (b - a)$: on a $a \leq c \leq b$ et

$$a + \frac{\hat{j}}{\omega} \times (b - a) \approx a + \frac{\hat{j} + 1}{\omega} \times (b - a) \quad (? 4.11).$$

Comme f est continue en c , on a

$$\text{st} \left[f\left(a + \frac{\hat{j}}{\omega} \times (b - a)\right) \right] = f(c) = \text{st} \left[f\left(a + \frac{\hat{j} + 1}{\omega} \times (b - a)\right) \right],$$

d'où $f(c) = r$ (? 4.12). ■

Application. Méthode de dichotomie pour trouver des zéros d'une fonction. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $f(a)f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'(au moins) un zéro de f dans $]a, b[$. On peut obtenir une approximation numérique d'un tel zéro c de la manière suivante. On divise tout d'abord l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales grâce à son milieu $m = \frac{a+b}{2}$; ou bien $f(m) = 0$ auquel cas $m = c$; ou bien $f(a)f(m) < 0$ auquel cas $c \in]a, m[$ et l'on peut recommencer le procédé de division en remplaçant b par m ; ou bien $f(a)f(m) > 0$ auquel cas $c \in]m, b[$ et l'on peut recommencer le procédé de division en remplaçant a par m . A chaque étape, on travaille sur un intervalle réduit de moitié et l'on continue le processus jusqu'à tomber sur un zéro ou sur un intervalle de longueur égale à deux fois la précision recherchée. Signalons que cette méthode est facile à concevoir et à mettre en œuvre, mais ne fournit généralement pas très rapidement l'approximation souhaitée.

Notons que la réciproque du théorème de Bolzano n'est pas valable, ainsi qu'en atteste la figure 4.2 : $f([a, b])$ coïncide avec l'intervalle $[f(a), f(b)]$, mais la fonction f est discontinue en c .

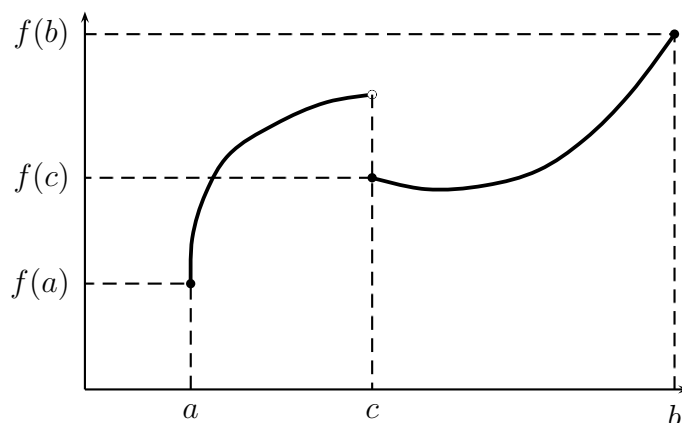


Figure 4.2: Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

Pour une fonction f continue sur un intervalle I compact (c'est-à-dire fermé et borné, donc du type $[a, b]$ pour deux réels a et b (avec $a \leq b$)), on sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, mais on peut de plus affirmer que $f(I)$ est un intervalle compact.

Théorème 4.3.2 (Théorème des bornes atteintes de Weierstrass.) *Si f est une fonction continue sur un intervalle I compact, $f(I)$ est également un intervalle compact.*

Utilité des hypothèses. Les figures 4.3 ci-dessous montrent qu'aucune hypothèse du théorème de Weierstrass n'est superflue.

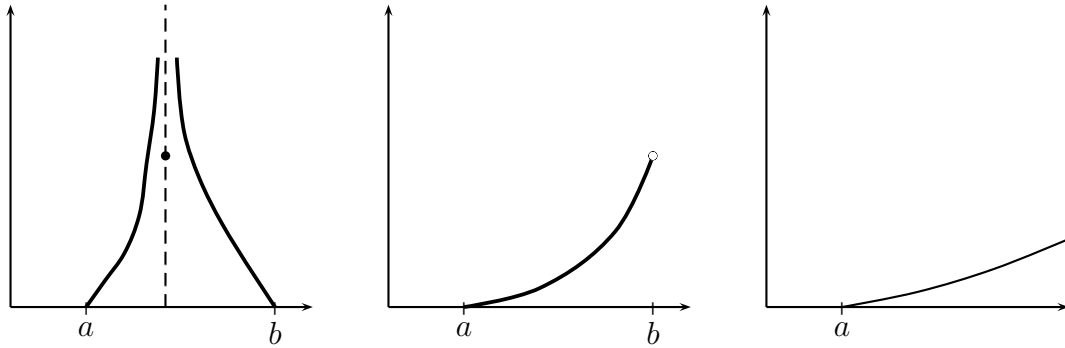


Figure 4.3: Utilité des hypothèses du théorème de Weierstrass

Preuve. Comme dans la preuve du théorème des valeurs intermédiaires, construisons une partition hyperfinie de ${}^*[a, b]$ à l'aide des points de subdivision

$${}^*x_j = a + \frac{j}{\omega} \times (b - a),$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots, \omega$, où ω désigne un entier infiniment grand positif. En vertu du principe de finitude, la suite hyperfinie

$$\{f(a) = f({}^*x_0), f({}^*x_1), f({}^*x_2), \dots, f({}^*x_\omega) = f(b)\}$$

contient un plus grand élément, soit $f({}^*x_{\tilde{j}})$; désignons par c la partie standard de ${}^*x_{\tilde{j}}$: $c \in [a, b]$ (? 4.18). Soit un réel x de $[a, b]$; il appartient à un et un seul intervalle de la partition, soit par exemple à $[{}^*x_k, {}^*x_{k+1}[$. On a

$$f({}^*x_k) \leq f({}^*x_{\tilde{j}})$$

avec $x \approx {}^*x_k$ (? 4.19). Il en résulte que

$$f(x) \leq f(c) \text{ (? 4.20).}$$

On déduit de la même manière l'existence d'un réel d de $[a, b]$ tel que

$$f(d) \leq f(x)$$

pour tout x de $[a, b]$. ■

Application. Le théorème de Weierstrass garantit l'existence du maximum et du minimum d'une fonction continue sur un intervalle compact. Ce résultat est très souvent appliqué dans la pratique, puisque de nombreux problèmes économiques consistent à optimiser (c'est-à-dire rechercher le maximum ou le minimum) d'un objectif, qui est une fonction généralement continue : le problème aura donc toujours une solution pour autant que l'on travaille sur un intervalle compact.

Une autre propriété intéressante de la continuité est la suivante : lorsqu'une fonction f est continue en un réel r où la valeur $f(r)$ est négative (ou positive, ou encore inférieure ou supérieure à n'importe quel réel), les valeurs de f restent négatives (ou positives, ou encore inférieures ou supérieures au réel considéré) en une infinité de points voisins de r , notamment dans le halo $H(r)$. L'exemple de fonctions étagées montre que cette propriété n'est pas vérifiée par toute fonction non continue.

4.4 Annexes

4.4.1 Citations historiques

- (Les courbes ou équations de demande $d = F(p)$ sont continues,) *c'est-à-dire qu'une augmentation infiniment petite de p y produise une diminution infiniment petite de d .* [Walras (1874), p. 57].
- *Nous admettons que la fonction $F(p)$ qui exprime la loi de la demande ou du débit est une fonction continue, c'est-à-dire une fonction qui ne passe pas soudainement d'une valeur à une autre, mais qui prend dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires. Il en pourrait être autrement si le nombre des consommateurs était très limité : ainsi, dans tel ménage, on pourra consommer précisément la même quantité de bois de chauffage, que le bois soit à 10 francs ou à 15 francs le stère; et l'on pourra réduire brusquement la consommation d'une quantité notable, si le prix du stère vient à dépasser cette dernière somme. Mais plus le marché s'étendra, plus les combinaisons des besoins, des fortunes ou même des caprices, seront variées parmi les consommateurs, plus la fonction $F(p)$ approchera de varier avec p d'une manière continue. Si petite que soit la variation de p , il se trouvera des consommateurs placés dans une position telle que le léger mouvement de hausse ou de baisse imprimé à la denrée influera sur leur consommation, les engagera à s'imposer quelques privations, ou à réduire leurs exploitations industrielles, ou à substituer une autre denrée à la denrée renchérie, par exemple, la houille au bois, ou l'antracite à la houille. C'est ainsi que le thermomètre de la bourse accuse, par de très petites variations du cours, les variations les plus fugitives dans l'appréciation des chances auxquelles les fonds publics sont sujets, variations qui ne sont point une raison suffisante de vendre ni d'acheter pour la plupart de ceux qui ont leur fortune engagée dans les fonds publics.* [Cournot (1838), pp. 38-39].
- *Prenons l'exemple du réglage d'un récepteur radio sur une fréquence d'émission : nous partons de l'idée que la réception sera d'autant plus proche de la perfection que le réglage sera précis. Il s'agit d'un véritable postulat de continuité. On peut traduire dans le langage des fonctions l'idée de continuité que nous venons d'exposer de la manière suivante : $f(x)$ sera d'autant plus proche de $f(x_0)$ que x sera proche de x_0 .* [Planche (1999), p. 49].

- *Lorsqu'une grandeur physique varie avec le temps, ou en raison seulement de la variation des distances entre des molécules ou des systèmes matériels, ou par l'effet de l'écoulement du temps combiné avec la variation des distances, il répugne qu'elle passe d'une valeur finie à une autre, sans prendre dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires. C'est ce qu'exprime l'adage célèbre des anciennes écoles : "Natura non facit saltus". Mais dans l'état d'imperfection de nos connaissances sur la constitution des milieux matériels, on est autorisé à admettre pour certaines grandeurs physiques, telles que nous les pouvons définir et mesurer, des solutions de continuité résultant du passage brusque d'une valeur finie à une autre. Ainsi, quand deux liquides hétérogènes, tels l'eau et le mercure, sont superposés, nous regardons la densité comme une grandeur qui varie brusquement à la surface de contact des deux liquides : bien que toutes les probabilités nous portent à croire, et qu'il soit philosophique d'admettre que la solution de continuité disparaîtrait, si nous nous rendions complètement compte de la structure des liquides, et de tous les phénomènes qui se passent dans le voisinage de la surface de contact. [Cournot (1841), pp. 8-9].*
- *On peut considérer le physicien qui étudie le comportement macroscopique d'un phénomène dont le comportement microscopique est trop complexe pour lui comme un observateur limité qui ne peut saisir que l'ombre des choses. (...) Les mathématiques du continu sont plus faciles que les mathématiques du discret (le continu est un appauvrissement, au demeurant souvent volontaire et tactique, du discret). [Harthong (1983), pp. 1200-1201].*
- *Il est bien permis de remarquer que, dans l'interprétation mathématique des phénomènes naturels, on fait tour à tour, et en quelque sorte suivant les besoins de la cause, appel aux deux notions de continu et de discontinu. S'il est vrai par exemple qu'en Mécanique on suppose en général que les vitesses varient d'une manière continue, dans la théorie des chocs et des percussions, on raisonne comme si ces vitesses subissaient des variations brusques. Il ne s'agit que d'approximations, c'est entendu; mais on voit que le discontinu, tout comme le continu, peut servir dans l'approximation. Certaines théories de Physique, de Chimie, de Minéralogie ne sont pas sans présenter quelque analogie avec le discontinu mathématique. Dans tous les cas, en dépit du vieil adage démodé, rien ne permet d'affirmer que "la nature ne fait pas de sauts". [Baire (1905), p. VI-VII].*

4.4.2 Limites et continuité

La propriété de continuité peut être exprimée à l'aide de la notion de limite déjà évoquée dans le chapitre précédent. En effet, la formule

$$\forall *x \in *D, *x \approx a \Rightarrow f(*x) \approx f(a)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Plus généralement, on dira que la limite pour x tendant vers a de $f(x)$ vaut b et on écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ lorsque

$$\forall *x \in *D, *x \approx a \Rightarrow f(*x) \approx b.$$

Chapitre 5

Dérivabilité et différentiabilité

5.1 Introduction

Dans la pratique, on s'intéresse souvent à la variation d'une grandeur provoquée par un accroissement (ou une diminution) d'une autre grandeur dont dépend la première : il s'avère alors souvent utile de relativiser la variation de la première grandeur par celle de la seconde. Par exemple, sachant que le coût de production pour fabriquer q unités d'un bien vaut $C(q)$, l'augmentation de coût engendrée par un accroissement Δq de la quantité produite est donnée par

$$\Delta C = C(q + \Delta q) - C(q).$$

Comme l'interprétation concrète de cette variation ΔC peut différer selon l'importance de Δq , on construit le rapport $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ qui mesure l'augmentation moyenne du coût lorsque la production passe de q à $q + \Delta q$; dans le cas particulier d'un accroissement unitaire de la production ($\Delta q = 1$), le rapport vaut $C(q + 1) - C(q)$ et correspond au coût de l'unité additionnelle.

Bien entendu, le rapport $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ dépend non seulement de q , mais aussi de Δq ; pour mieux refléter la situation pour une production donnée de q , on choisit des variations Δq très petites, ce qui suppose vérifiée l'hypothèse de divisibilité du bien à produire. Généralement, plus la variation Δq devient petite, plus la variation ΔC devient également petite, mais le rapport $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ semble se stabiliser. En imaginant des variations Δq (hyperréelles et) infiniment petites, les rapports $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ peuvent différer, mais ont tous la même valeur observée. La partie standard d'un tel rapport $\frac{\Delta C}{\Delta q}$, lorsque ΔC et Δq sont infiniment petits, est nommé, par les mathématiciens, le nombre dérivé (ou simplement la dérivée) du coût de production pour une production de q et, par les économistes, le coût marginal correspondant à une production de q ; ce coût marginal est noté $C'(q)$ ou encore $\frac{dC}{dq}$.

Cet exemple concret illustre le concept de dérivabilité d'une fonction.

5.2 Définition

Définition 5.2.1 Soient f une fonction réelle définie sur un domaine D et r un réel situé à l'intérieur de D (ce qui revient à supposer que $H(r) \subset {}^*D$). Si, pour tout hyperréel ε infiniment petit, le quotient

$$Q(\varepsilon) = \frac{f(r + \varepsilon) - f(r)}{\varepsilon}$$

est un nombre limité dont la partie standard ne dépend pas de ε , alors la fonction f est dite dérivable en r et le nombre réel $\text{st}(Q(\varepsilon))$ est appelé le nombre dérivé (ou simplement la dérivée) de f en r ; il est noté $f'(r)$.

Remarques. 1. Le nombre dérivé $f'(r)$ se note encore souvent $\frac{df}{dx}(r)$; comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, cette notation a l'avantage de rappeler que le nombre dérivé coïncide pratiquement avec le quotient de la variation de f par la variation, supposée infiniment petite, de la variable x .

2. Sous réserve d'existence, on écrit encore, pour Δx ip :

$$f'(r) = \text{st} \left(\frac{f(r + \Delta x) - f(r)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right).$$

3. En utilisant la notion de limite, on note

$$f'(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r + h) - f(r)}{h},$$

ou encore

$$f'(r) = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}.$$

Proposition 5.2.2 Pour tout hyperréel infiniment petit ε , si f est dérivable en r , il existe un hyperréel α infiniment petit ou nul donnant lieu à cette égalité :

$$f(r + \varepsilon) = f(r) + f'(r)\varepsilon + \alpha\varepsilon.$$

Preuve. Cela découle immédiatement de la définition du nombre dérivé (? 5.1). ■

Exemples. • La dérivée d'une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ est partout égale à la constante m qui est le coefficient angulaire de la droite représentant le graphe de la fonction; en effet, pour r réel et ε infiniment petit, on a

$$Q(\varepsilon) = \frac{f(r + \varepsilon) - f(r)}{\varepsilon} = \frac{m(r + \varepsilon) + p - (mr + p)}{\varepsilon} = m.$$

En particulier, la dérivée d'une constante est nulle.

- Pour $f(x) = x^3$, r réel et ε infiniment petit, on a

$$Q(\varepsilon) = \frac{f(r + \varepsilon) - f(r)}{\varepsilon} = \frac{(r + \varepsilon)^3 - r^3}{\varepsilon} = 3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2,$$

d'où l'on déduit

$$\text{st}(Q(\varepsilon)) = f'(r) = 3r^2.$$

- Considérons la fonction exponentielle f_a de base a (avec $a > 0$) : pour tout réel x , on a $f_a(x) = a^x$. La fonction f_a est continue en 0, puisque $a^{*x} \approx 1$ pour $*x \approx 0$. Bien plus, on peut vérifier sur des exemples numériques (? 5.2), que les nombres

$$\frac{a^x - 1}{x}$$

se stabilisent au fur et à mesure que x devient, en valeur absolue, très petit (en restant non nul); on admettra dès lors que, pour un réel a fixé et pour tout hyperréel ε infiniment petit, l'extension naturelle de f_a est telle que

$$\frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \text{ est un nombre limité}$$

dont la partie standard est constante, égale par définition à $f'_a(0)$. Ce nombre dérivé $f'_a(0)$ varie bien entendu avec a (ainsi qu'on peut le vérifier sur des exemples numériques). Le nombre réel, noté e , tel que $f'_e(0) = 1$, est une valeur particulière du paramètre a , il est souvent choisi comme base de l'exponentielle; on a donc, pour tout ε infiniment petit,

$$\text{st}\left(\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) = 1.$$

Nous montrerons ultérieurement que ce nombre e est irrationnel; il vaut approximativement 2.71828. Il est par ailleurs fréquent d'écrire e^x sous la forme $\exp(x)$, surtout lorsque l'exposant est d'écriture volumineuse.

- Toutes les fonctions ne sont pas partout dérivables (même à l'intérieur de leur domaine de définition). Ainsi, l'origine n'est pas un point de dérivabilité pour certaines fonctions qui y sont définies, ainsi qu'en attestent les exemples des fonctions définies par $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[3]{x}$ et $|x|$: elles ne sont pas dérivables en l'origine. En effet, pour ε infiniment petit, le quotient $Q(\varepsilon)$ n'est pas limité dans les deux premier cas, et dépend du signe de ε dans le dernier cas. (? 5.3)

Le dernier exemple montre l'existence d'une fonction continue mais non dérivable en un point; par contre, toute fonction dérivable en un point y est continue; démontrons ce résultat important.

Théorème 5.2.3 (Dérivabilité et continuité). *Une fonction f dérivable en un réel r est continue en r . La réciproque n'est pas vraie.*

Preuve. Lorsque f est dérivable en r , on peut écrire pour un infiniment petit ε arbitraire (? 5.4)

$$f(r + \varepsilon) = f(r) + \dots,$$

où le reste \dots est infiniment petit. On en déduit que la partie standard de $f(r + \varepsilon)$ coïncide avec le réel $f(r)$, ce qui prouve la continuité de f en r .

En ce qui concerne la réciproque, nous savons que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 sans y être dérivable. ■

5.3 Dérivabilité et différentiabilité

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, l'image d'une courbe donnée par un microscope infiniment puissant dirigé vers un point de celle-ci est généralement fournie par une droite non verticale dont le coefficient angulaire est celui de la tangente menée à la courbe depuis le point considéré. Par exemple, pour la parabole d'équation $y = x^2$ et le point $P = (1, 1)$, l'image observée est la droite d'équation $Y = 2X$. Une telle situation donne naissance à ce concept :

Définition 5.3.1 *Une fonction f est différentiable en un réel r si, quel que soit ω infiniment grand positif, la partie observable du graphe de f dans l'oculaire du microscope \mathcal{M}_ω^P avec $P = (r, f(r))$ est une droite non verticale passant par l'origine, c'est-à-dire d'équation $Y = mX$ avec $m \in \mathbb{R}$. La fonction linéaire L dont le graphe est la droite d'équation $Y = mX$ est appelée la différentielle de f en r et est souvent notée df_r ou simplement df :*

$$df_r : X \mapsto mX.$$

Cette notion de différentiabilité n'est en fait pas neuve ainsi que le montre cet énoncé.

Théorème 5.3.2 (Liens entre dérivabilité et différentiabilité) *Une fonction f est dérivable en un réel r si et seulement si f est différentiable en r .*

Preuve. Considérons un hyperréel ω qui est infiniment grand positif arbitraire. Le graphe \mathcal{C} de f est, en vertu des règles d'extension et de transfert, la courbe d'équation ${}^*y = f({}^*x)$. Nous allons porter notre attention sur son image par le microscope \mathcal{M}_ω^P avec $P = (r, f(r))$.

Supposons tout d'abord f dérivable en r . L'image de la courbe \mathcal{C} dans l'oculaire du microscope est définie par

$$f(r) + \frac{{}^*Y}{\omega} = f\left(r + \frac{{}^*X}{\omega}\right),$$

où *X et *Y sont limités car observables dans l'oculaire, avec *X non nul (? 5.5). On en déduit

$$\frac{{}^*Y}{\omega} = \left(\frac{f\left(r + \frac{{}^*X}{\omega}\right) - f(r)}{\frac{{}^*X}{\omega}} \right) \frac{{}^*X}{\omega},$$

puis

$$*Y = \omega \left(\frac{f(r + \frac{*X}{\omega}) - f(r)}{*X} \right) *X.$$

En prenant les parties standard des deux membres de cette équation et en exploitant l'hypothèse de dérivabilité, on obtient (? 5.6)

$$Y = f'(r)X,$$

le coefficient angulaire de la droite vue dans l'oculaire coïncide donc avec le nombre dérivé de f en r .

Réciproquement, admettons que f est différentiable en r , considérons un hyperréel ε infiniment petit et posons $\omega = \frac{1}{|\varepsilon|}$. Dans l'oculaire de \mathcal{M}_ω^P , on voit une droite d'équation $Y = mX$. On peut dès lors écrire, pour un hyperréel α infiniment petit ou nul :

$$*Y = m *X + \alpha, \text{ c'est-à-dire } \omega(*y - f(r)) = m\omega(*x - r) + \alpha.$$

Comme $*y = f(*x)$, on a (? 5.7), pour $*x = r + \varepsilon$:

$$\frac{f(r + \varepsilon) - f(r)}{\varepsilon} = m + \frac{\alpha}{\omega(*x - r)}.$$

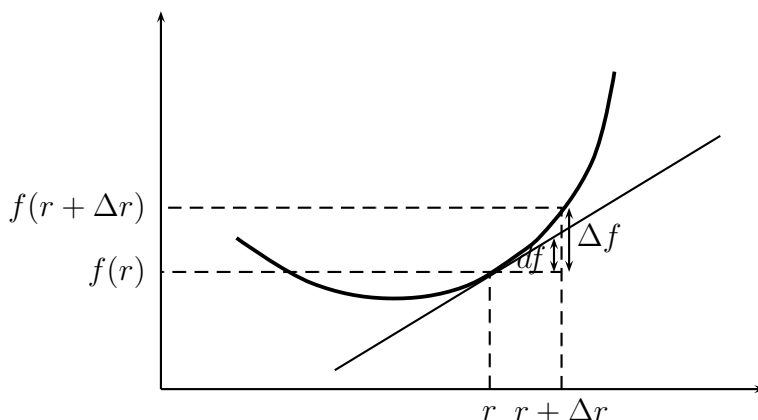
On en déduit que $f'(r) = m$ (? 5.8). ■

- Remarques.*
1. Nous verrons ultérieurement que, pour des fonctions de plusieurs variables, les notions de dérivabilité et de différentiabilité ne coïncident pas.
 2. En vertu de ce théorème, les propriétés des différentielles s'obtiennent directement à partir de celles des dérivées. Il résulte de ce qui précède que, pour une fonction f dérivable en r , la variation $\Delta f_r(h) = f(r+h) - f(r)$ pour une variation h de la variable est fort proche de la valeur de la différentielle df_r en h ; en effet, pour h infiniment petit, il existe un infiniment petit ε tel que

$$\begin{aligned} \Delta f_r(h) &= f'(r)h + h\varepsilon \quad (? 5.9) \\ &= df_r(h) + h\varepsilon; \end{aligned}$$

ainsi, dans l'oculaire d'un $\frac{1}{|h|}$ -microscope pointé sur $P = (r, f(r))$, la variation réelle $\Delta f_r(h)$ se confond avec $df_r(h)$. Dans la pratique, il est souvent plus commode de calculer $df_r(h) = f'(r)h$ plutôt que $\Delta f_r(h)$; de plus, la différentielle df_r possède l'avantage d'être proportionnelle à h , c'est-à-dire que $df_r(\lambda h) = \lambda df_r(h)$, et même linéaire par rapport à h , c'est-à-dire que $df_r(h_1 + h_2) = df_r(h_1) + df_r(h_2)$. En prenant en particulier pour f la fonction identique, on obtient que dx représente un accroissement accordé à la variable (? 5.10) ; ainsi, le nombre dérivé $f'(r)$ apparaît comme étant le quotient de la différentielle df_r par la différentielle dx , ce qui permet notamment de justifier la notation courante $f'(r) = \frac{df_r}{dx}$. Toutefois, en considérant df_r et dx comme des nombres égaux à des variations de la fonction et de la variable respectivement, on s'autorise *l'abus fréquent qui*

consiste à confondre une fonction et sa valeur. Et si, souvent, on rajoute que cet accroissement (dx) doit être petit, ce n'est pas parce que la différentielle n'est définie que pour des accroissements petits (c'est une application définie sur \mathbb{R} tout entier), c'est parce que l'approximation différentielle ne présente d'intérêt (...) que localement..(A-A, 1989, Annexe, p. 2).



Proposition 5.3.3 Dans le cas où la courbe C est le graphe d'une fonction f dérivable en r , la tangente à la courbe au point d'abscisse r a pour équation

$$y - f(r) = f'(r)(x - r).$$

Preuve. Cela découle immédiatement de la définition de la tangente et du théorème 5.3.2. ■

Par ailleurs, considérons une fonction f dérivable en un réel r et ε ip. Les deux points

$$P = (r, f(r)) \text{ et } *P = (r + \varepsilon, f(r + \varepsilon))$$

sont infiniment proches l'un de l'autre et sont situés sur le graphe G de f . Etant distincts, ils déterminent une droite : cette droite, qui est nommée "corde" ou "sécante", passe par P , est de coefficient angulaire égal à

$$\frac{f(r + \varepsilon) - f(r)}{\varepsilon}$$

et coupe G aux deux points P et $*P$. Si l'on fait varier ε , la sécante varie avec $*P$. Cependant, la partie standard du coefficient angulaire des sécantes est constante et vaut $f'(r)$. L'image de ces différentes sécantes est ainsi une droite de coefficient angulaire $f'(r)$, passant par P ; il s'agit dès lors de la tangente au graphe de f au point P . Nous réunissons ainsi deux approches de la tangente : celle par les sécantes et celle du microscope infiniment puissant. La première approche est illustrée, dans les réels, par la figure 5.1 tandis que la seconde est visualisée sur la figure 5.2.

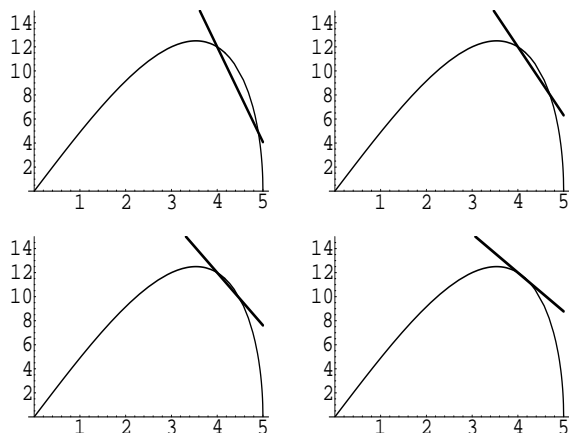


Figure 5.1: Limite des sécantes à la fonction définie par $y = x\sqrt{25 - x^2}$ au point $P = (4, 12)$

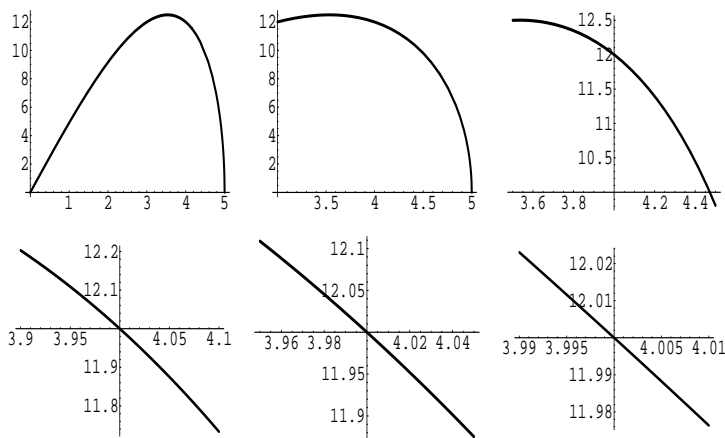


Figure 5.2: Images dans l'oculaire de microscopes de la fonction définie par $y = x\sqrt{25 - x^2}$ au point $P = (4, 12)$

5.4 Calcul de nombres dérivés

Dans toute cette section, nous allons exploiter un microscope infiniment puissant dirigé vers le point $P = (r, s)$ situé sur le graphe de la fonction considérée; nous noterons ω la puissance de ce microscope : il s'agit d'un hyperréel infiniment grand positif arbitraire. Nous noterons simplement \mathcal{M}_ω^P ce microscope. Nous conviendrons de plus de rassembler dans un reste, matérialisé par le symbole \dots , tous les termes qui, après multiplication par ω , sont infiniment petits. Par ailleurs, les hyperréels $*X$ et $*Y$ que nous considérerons

seront toujours supposés limités et non nuls, ce qui implique que $*x \approx r$ et $*y \approx s$, et nous noterons simplement par X et Y leur partie standard respective. Enfin, nous appliquerons automatiquement, et sans les rappeler à chaque fois, les principes d'extension et de transfert.

En ce qui concerne le comportement de la dérivation vis-à-vis des opérations arithmétiques, on dispose de ce résultat :

Théorème 5.4.1 (Dérivation et opérations algébriques). *Soient f et g deux fonctions dérivables en un réel r . Les fonctions $f + g$, $f - g$ et fg sont dérivables en r et l'on a :*

- $(f + g)'(r) = f'(r) + g'(r)$,
- $(f - g)'(r) = f'(r) - g'(r)$ et
- $(fg)'(r) = f'(r)g(r) + f(r)g'(r)$;

$\frac{f}{g}$ est dérivable en r si $g(r) \neq 0$ et l'on a, dans ces conditions

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(r) = \frac{f'(r)g(r) - f(r)g'(r)}{[g(r)]^2}.$$

Preuve. • Pour $y = f(x) + g(x)$, l'usage du microscope \mathcal{M}_ω^P fournit cette égalité (? 5.13):

$$f(r) + g(r) + \frac{*Y}{\omega} = f(r) + \frac{*X}{\omega}f'(r) + \dots + g(r) + \frac{*X}{\omega}g'(r) + \dots$$

Un passage par la partie standard, après simplifications, livre :

$$Y = (f'(r) + g'(r))X,$$

ce qui permet de conclure (? 5.14).

- Le cas de la différence se traite de la même manière (? 5.15).
- Pour le produit, on obtient semblablement :

$$f(r)g(r) + \frac{*Y}{\omega} = f(r)g(r) + \frac{*X}{\omega}(f'(r)g(r) + f(r)g'(r)) + \dots$$

On en déduit cette égalité sur les parties standard (? 5.16)

$$Y = (f'(r)g(r) + f(r)g'(r))X,$$

d'où la thèse (? 5.17).

- Pour le quotient, on trouve de la même manière (? 5.18)

$$\left(g(r) + g'(r)\frac{*X}{\omega} + \dots\right) \left(\frac{f(r)}{g(r)} + \frac{*Y}{\omega}\right) = f(r) + f'(r)\frac{*X}{\omega} + \dots;$$

en développant les deux termes de cette égalité (? 5.19), on a

$$g(r)\frac{*Y}{\omega} + \frac{f(r)g'(r)}{g(r)}\frac{*X}{\omega} + \dots = f'(r)\frac{*X}{\omega} + \dots,$$

d'où, par passage à la partie standard (? 5.20)

$$Y = \frac{f'(r)g(r) - f(r)g'(r)}{(g(r))^2}X,$$

ce qu'il fallait démontrer (? 5.21). ■

Beaucoup de fonctions exploitées en pratique s'obtiennent en composant deux (ou plusieurs) fonctions. On applique alors cet énoncé :

Théorème 5.4.2 (Théorème de dérivation de fonctions composées). *Si f est une fonction dérivable en r et g une fonction dérivable en $s = f(r)$, alors $g \circ f$ est dérivable en r et l'on a : $(g \circ f)'(r) = g'(s)f'(r) = g'(f(r))f'(r)$.*

Preuve. Le recours à un microscope \mathcal{M}_ω^P permet d'écrire (? 5.22)

$$g(f(r)) + \frac{*Y}{\omega} = g\left(f(r) + \frac{*X}{\omega}\right).$$

Or, on sait que (? 5.23)

$$f\left(r + \frac{*X}{\omega}\right) = f(r) + f'(r)\frac{*X}{\omega} + \dots,$$

ce qui entraîne (? 5.24)

$$g\left(f\left(r + \frac{*X}{\omega}\right)\right) = g(f(r)) + g'(f(r))\frac{*X}{\omega}f'(r) + \dots$$

Après des simplifications et un passage par les parties standard (? 5.25), on peut écrire

$$Y = g'(f(r))f'(r)X,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque. Il suffit d'itérer le procédé autant de fois que nécessaire pour obtenir la formule de dérivation des fonctions composées.

Lorsqu'une fonction est la réciproque d'une autre, la connaissance de la dérivée de cette dernière permet, sous certaines hypothèses, de trouver la dérivée de la fonction de départ. On dispose en effet de ce résultat :

Théorème 5.4.3 (Dérivation des fonctions réciproques.) *Soient f une fonction strictement monotone sur un intervalle I , f^{-1} la fonction réciproque de f , r un point de I en lequel f est dérivable, $s = f(r)$. Si $f'(r) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en s et l'on a :*

$$(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}.$$

Preuve. L'égalité $x = f^{-1}(y)$ équivaut à $y = f(x)$ (? 5.26). Au moyen du microscope \mathcal{M}_ω^P , on trouve

$$s + \frac{*Y}{\omega} = f\left(r + \frac{*X}{\omega}\right),$$

ce qui permet d'écrire (? 5.27)

$$s + \frac{*Y}{\omega} = f(r) + f'(r)\frac{*X}{\omega} + \dots$$

Comme $f(r) = s$, un passage aux parties standard(? 5.28) livre (? 5.29)

$$X = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}Y,$$

d'où l'on déduit la thèse (? 5.30). ■

Les principales fonctions élémentaires sont dérivables (donc différentiables) en tout point de leur domaine de définition.

Théorème 5.4.4 *Soient r et s deux réels, et n un entier naturel.*

1. *Pour $f(x) = x^n$, $f'(r) = nr^{n-1}$.*
2. *Pour $f(x) = \sin x$, $f'(r) = \cos r$.*
3. *Pour $f(x) = \cos x$, $f'(r) = -\sin r$.*
4. *Pour $f(x) = \operatorname{tg} x$ et $r \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $f'(r) = \frac{1}{\cos^2 r}$.*
5. *Pour $f(x) = \operatorname{cotg} x$ et $r \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $f'(r) = \frac{-1}{\sin^2 r}$.*
6. *Pour $f(x) = \arcsin x$ et $s \in]-1, 1[$, $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$.*
7. *Pour $f(x) = \arccos x$ et $s \in]-1, 1[$, $f'(s) = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$.*
8. *Pour $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(s) = \frac{1}{1+s^2}$.*

9. Pour $f(x) = e^x$, $f'(r) = e^r$.
10. Pour $f(x) = a^x$ avec $a > 0$, $f'(r) = a^r \ln a$.
11. Pour $f(x) = \ln x$ et $s > 0$, $f'(s) = \frac{1}{s}$
12. Pour $f(x) = \log_a x$ avec a positif et différent de 1 et s positif, $f'(s) = \frac{1}{s \ln a}$.

Preuve. 1. L'égalité $y = x^n$ vue au moyen du microscope \mathcal{M}_ω^P entraîne

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + r^n = \left(r + \frac{{}^*X}{\omega}\right)^n.$$

La formule du binôme de Newton permet d'écrire (? 5.31) :

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + r^n = r^n + nr^{n-1} \frac{{}^*X}{\omega} + \dots$$

On en déduit aisément la thèse (? 5.32).

2. De l'égalité $y = \sin x$, on tire (? 5.33)

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + \sin r = \sin \left(r + \frac{{}^*X}{\omega}\right).$$

De là,

$$\frac{{}^*Y}{\omega} = \sin \left(r + \frac{{}^*X}{\omega}\right) - \sin r$$

La formule de trigonométrie de Simpson relative à la différence de deux sinus donne (? 5.34)

$$\frac{{}^*Y}{\omega} = 2 \sin \left(\frac{{}^*X}{2\omega}\right) \cos \left(r + \frac{{}^*X}{2\omega}\right).$$

En multipliant et divisant par le facteur $\frac{{}^*X}{\omega}$ et en passant à la partie standard après simplification, on obtient (? 5.35)

$$Y = (\cos r)X.$$

3. Pour dériver un cosinus, il suffit (? 5.36) de le transformer en le sinus de l'angle complémentaire, puis d'appliquer (? 5.37) le théorème de dérivation des fonctions composées.
4. La dérivée de la tangente s'obtient en dérivant un quotient et en utilisant les formules précédentes (? 5.38).
5. La dérivée de la cotangente s'obtient de manière identique à celle de la tangente.

6. Par le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on a (? 5.39), pour $f(x) = \arcsin x$,

$$f'(s) = \frac{1}{\sin'(\arcsin s)} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin s)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

7. Le cas de l'arccosinus se traite en constatant (? 5.40) que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
8. Pour $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$, une nouvelle application du théorème de dérivation des fonctions réciproques livre (? 5.41)

$$f'(s) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} s)} = \cos^2(\operatorname{arctg} s) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} s)} = \frac{1}{1 + s^2}.$$

9. Si $y = f(x) = e^x$, on a (? 5.42)

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + e^r = \exp\left(\frac{{}^*X}{\omega} + r\right) = e^r \exp\left(\frac{{}^*X}{\omega}\right).$$

On peut conclure (? 5.43) que $f'(r) = e^r$ en remarquant (? 5.44) que

$$\exp\left(\frac{{}^*X}{\omega}\right) = 1 + \frac{{}^*X}{\omega} + \dots$$

10. Le cas d'une exponentielle de base a positive quelconque découle (? 5.45) de la formule

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

11. Si $f(x) = \ln x$, le théorème de dérivation des fonctions réciproques donne (? 5.46)

$$f'(s) = \frac{1}{\exp'(\ln s)} = \frac{1}{\exp(\ln s)} = \frac{1}{s}.$$

12. Le cas du logarithme de base a se traite (? 5.47) grâce à la formule

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \blacksquare$$

5.5 Les fonctions dérivées d'ordre quelconque

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Si une fonction f est dérivable en tout point de I , on peut envisager la fonction dérivée notée f' et définie par $f' : x \in I \mapsto f'(x)$. En recommençant cette opération de dérivation, on obtient, sous réserve d'existence, les dérivées successives ou d'ordre supérieur à l'unité.

Définition 5.5.1 Soit f une fonction dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I . On dit que la fonction f est dérivable dans I si elle est dérivable en tout point de I ; dans ce cas, on appelle dérivée de f la fonction f' définie par $f' : x \in I \rightarrow f'(x)$. La fonction f est deux fois dérivable dans I lorsque f' est dérivable dans I : $(f')'$ se note alors simplement f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Plus généralement, si n désigne un entier naturel au moins égal à 2, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est la dérivée de la dérivée d'ordre $n - 1$ et se note $f^{(n)}$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$. On convient encore d'écrire $f^{(0)} = f$.

Remarque. La notation $\frac{d^2f}{dx^2}$ pour désigner la dérivée seconde f'' peut se justifier en calculant la différentielle seconde, notée d^2f , c'est-à-dire la différentielle de la différentielle de f , où le facteur dx est supposé constant. On a en effet ces égalités

$$d^2f = d(df) = d(f'dx) = d(f')dx = f''dx dx = f''(dx)^2.$$

Notons que l'on ne peut envisager la dérivabilité d'une fonction f que dans un intervalle ouvert. Toutefois, les principaux théorèmes de l'analyse sont valables pour une fonction f continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ mais dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant $]a, b[$: une telle fonction f est dite "aimable" sur $[a, b]$.

Exemple. La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ est aimable sur l'intervalle $[0, 1]$.

On aura aussi très souvent recours à des fonctions dérivables dans un intervalle ouvert I et dont la dérivée est continue sur I : de telles fonctions sont dites continûment dérivables sur I . Plus généralement, on définit des fonctions k fois continûment dérivables (que l'on note $f \in C_k(I)$) et même indéfiniment dérivables (noté $C_\infty(I)$).

5.6 Dérivation partielle

Dans la pratique, on rencontre souvent des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, un consommateur qui achète deux biens en quantités respectives x et y en retire une satisfaction mesurée par une *fonction d'utilité* : à chaque *panier* (x, y) , cette fonction associe un nombre $U(x, y)$ mesurant cette satisfaction. Par ailleurs, une fonction de production f livre la quantité (maximale) q d'output qu'un entrepreneur peut produire en utilisant deux inputs en quantités respectives x et y , ce qui se note $q = f(x, y)$.

Lorsqu'on est amené à étudier des variations de telles fonctions de deux variables, on fixe généralement l'une des variables. Ainsi, dans la théorie de la production, on analysera l'impact d'une augmentation d'un seul input sur la production globale; par exemple, supposons connu un plan de production déterminé par l'égalité $q_0 = f(x_0, y_0)$: pour un accroissement Δx du premier input, et lorsque le niveau de l'autre output reste fixé à y_0 , l'augmentation correspondante Δq de l'output est donnée par

$$\Delta q = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Plus généralement, considérons une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie sur un domaine D auquel est “intérieur” un point $P = (r, s)$. Nous pouvons fixer l’ordonnée égale à s et ne faire varier que l’abscisse x , ce qui donne naissance à une fonction φ_1 de la seule variable x définie par

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, s).$$

Si φ_1 est dérivable en r , le nombre dérivé $\varphi_1'(r)$ est appelé la *dérivée partielle* de f par rapport à la première variable, ou encore par rapport à x au point P ; on note ce nombre dérivé indifféremment

$$\varphi_1'(r) = f_1'(r, s) = f'_x(r, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(r, s),$$

en remplaçant éventuellement (r, s) par P . Dans ce cas, pour ε infiniment petit arbitraire, on sait que le quotient différentiel

$$Q_1(\varepsilon) = \frac{f(r + \varepsilon, s) - f(r, s)}{\varepsilon}$$

est limité et que sa partie standard ne dépend pas de ε : elle est égale à $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$. On peut dès lors écrire cette égalité valable pour un α infiniment petit ou nul

$$f(r + \varepsilon, s) = f(r, s) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \varepsilon \alpha.$$

De même, on peut construire la fonction

$$\varphi_2 : y \mapsto f(r, y);$$

si φ_2 est dérivable en s , le nombre dérivé $\varphi_2'(s)$ est la *dérivée partielle* de f par rapport à la seconde variable, ou encore par rapport à y , ce qui se note :

$$\varphi_2'(s) = f_2'(r, s) = f'_y(r, s) = \frac{\partial f}{\partial y}(r, s);$$

on peut également écrire

$$f(r, s + \varepsilon) = f(r, s) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \varepsilon \alpha.$$

Ces définitions peuvent s’étendre à des fonctions de plus de deux variables. Ainsi, pour une fonction de n variables, notées x_1, x_2, \dots, x_n , définie par $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on dispose de n dérivées partielles de f en un point P : elles se notent $f'_k(P) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(P)$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Les économistes qui ne font varier qu’une seule variable à la fois emploient souvent la locution *et toutes choses égales par ailleurs* pour indiquer que les autres variables sont laissées invariantes. De plus, ils qualifient de *marginales* les valeurs des dérivées partielles

considérées; ainsi, en microéconomie, les *utilités marginales* ne sont rien d'autre que les dérivées partielles de la fonction d'utilité d'un consommateur, tandis que les *productivités marginales* désignent les dérivées partielles de la fonction de production d'une firme.

D'après leur définition, les dérivées partielles apparaissent comme étant des dérivées d'une fonction d'une seule variable. En conséquence, les règles de calcul relatives aux nombres dérivés de celles-ci leur sont applicables.

Exemples. • ??? = dangereux comme premier exemple??? $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$.

• $\frac{\partial \sin(x^3 - y^2)}{\partial x} = 3x^2 \cos(x^3 - y^2)$, $\frac{\partial \sin(x^3 - y^2)}{\partial y} = -2y \cos(x^3 - y^2)$.

• Si f désigne une fonction de Cobb-Douglas comprenant n variables, c'est-à-dire $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n x_j^{a_j}$ avec $a_j > 0$ et $x_j > 0$ pour tout indice j , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_k},$$

de sorte que l'élasticité partielle de f par rapport à x_k , définie par $E_k f = \frac{x_k}{f} \frac{\partial f}{\partial x_k}$, est égale à l'exposant a_k de la variable x_k dans la définition de f .

L'étude complète des fonctions de plusieurs variables est plus délicate que pour une variable unique; elle sera réalisée de manière approfondie ultérieurement.

5.7 Annexes

5.7.1 Citations

- *En quoi consiste donc le calcul qu'on appelle différentiel ? A trouver la limite du rapport entre la différence finie de deux quantités, et la différence finie de deux autres quantités, qui ont avec les deux premières une analogie dont la loi est connue. Il est évident que plus chacune de ces différences est petite, plus leur rapport approche de la limite qu'on cherche. Il est de plus évident, que tant que ces différences ne sont pas absolument nulles, le rapport n'est pas exactement égal à cette limite; et que lorsqu'elles sont nulles, il n'y a plus de rapport proprement dit : car il n'y a point de rapport entre deux choses qui n'existent point : mais la limite du rapport que ces différences avoient entr'elles lorsqu'elles étoient encore quelque chose, cette limite n'est pas moins réelle.* [D'Alembert (1759), cité par Gaud - Guichard - Sicre - Chrétien (1998), p. 127].
- *Si dans ce qui suit, pour être plus facilement compris, il m'arrive de mentionner les quantités comme étant les plus petites, ou évanescentes, ou ultimes, vous ne devez pas supposer que j'entends par là des quantités ayant une quelconque grandeur déterminée, mais bien conçues comme toujours diminuées, sans fin.* [Newton, cité par Hauchart-Rouche (1987), p. 353]

- Cette méthode a le grand inconvénient de considérer des quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être des quantités; car bien que nous puissions toujours bien concevoir les rapports de deux quantités, tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre à l'esprit aucune idée claire et précise dès le moment où ses termes se réduisent à rien en même temps. [Lagrange, cité par Hauchart-Rouche (1987), p. 353].
- La révolution marginaliste des années 1870 a impulsé le "calcul à la marge" en économie. Les pionniers de la microéconomie se proposaient d'analyser quantitativement certains phénomènes en termes de variations, de différences, de marges, et non en valeurs brutes. (...)

En économie, il est rare que les phénomènes connaissent d'amples variations. Il est préférable d'étudier l'impact de faibles variations de x sur y , ce qui revient à analyser ce qui se passe à proximité, au voisinage de x_1 . (...) Cette dérivée mesure la réaction moyenne de y à une variation "très petite", "infinitésimale" de x . Le mathématicien déplore le manque de rigueur d'une telle définition, mais l'économiste passe outre. Homme pratique, il avoue sans complexe confondre "très petite variation" et "variation égale à l'unité", cette dernière étant choisie la plus faible possible. [Dupont-Rys (1998), p. 43].

- Proposons-nous de trouver la dérivée de la fonction algébrique : $y = x^3 + ax^2 + bx + c$: nous aurons, en formant d'abord la différence Δy pour passer de là au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, et ensuite à la limite, $\Delta y = (x + \Delta x)^3 + a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (x^3 + ax^2 + bx + c) = (3x^2 + 2ax + b)\Delta x + (3x + a)\Delta x^2 + \Delta x^3$; d'où nous tirons $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 2ax + b + (3x + a)\Delta x + \Delta x^2$. Or, si nous faisons converger indéfiniment Δx vers zéro, les termes $(3x + a)\Delta x$, Δx^2 convergeront aussi indéfiniment vers zéro, et s'évanouiront à la limite: donc on a $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 2ax + b$. Au lieu d'employer ce tour de raisonnement, traitons les différences Δx , Δy comme des quantités infiniment petites, et désignons-les par dx , dy : nous aurons $dy = (3x^2 + 2ax + b)dx + (3x + a)dx^2 + dx^3$ (1); mais les termes $(3x + a)dx^2$ et dx^3 sont des infiniment petits du second et du troisième ordre, qui doivent être négligés vis-à-vis des quantités infiniment petites du premier ordre, dy , $(3x^2 + 2ax + b)dx$: donc on a simplement $dy = (3x^2 + 2ax + b)dx$ (2); d'où l'on tire, comme ci-dessus, $y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$. Maintenant (et c'est en ceci que consiste essentiellement l'avantage du procédé de Leibniz) il est clair qu'on aurait pu se dispenser d'écrire dans l'équation (1) et de calculer préalablement les termes en dx^2 et dx^3 , sachant que ces termes ne peuvent être que des infiniment petits d'ordres supérieurs, destinés à disparaître vis-à-vis des infiniment petits du premier ordre, de même et par la même raison que ceux-ci disparaissent vis-à-vis des quantités finies. Il y a plus: pour former Δy on a eu besoin de connaître la formule qui donne les développements des puissances $(x + \Delta x)^3$, $(x + \Delta x)^2$; tandis que, pour former l'équation (2), il aurait suffi de connaître les termes affectés de la première puissance de Δx dans les mêmes

développements. (...)

La méthode infinitésimale ne constitue pas seulement un artifice ingénieux : elle est l'expression naturelle du mode de génération des grandeurs physiques qui croissent par éléments plus petits que toute grandeur finie. Ainsi, (...) quand un corps, en se refroidissant, émet sans cesse de la chaleur thermométrique, la perte de température qu'il éprouve dans un intervalle de temps quelconque, si petit qu'on le suppose, est un effet composé, résultant, comme de sa cause, de la loi suivant laquelle le corps émet sans cesse, en chaque instant infiniment petit, une quantité infiniment petite de chaleur thermométrique. Le rapport entre les variations élémentaires de la chaleur et du temps est la raison du rapport qui s'établit entre les variations de ces mêmes grandeurs quand elles ont acquis des valeurs finies, le terme de "raison" étant pris dans son acception philosophique. [Cournot (1841), pp. 50, 83-87].

- *Le coût marginal est le supplément de coût entraîné par la production d'une unité supplémentaire de produit : $C_m(Q) = \frac{\Delta C_T(Q)}{\Delta Q} = \frac{C_T(Q+1) - C_T(Q)}{Q+1 - Q} = C_T(Q+1) - C_T(Q)$. Lorsqu'on raisonne sur des accroissements infinitésimaux de production (hypothèse de divisibilité), le coût marginal s'exprime par la dérivée de la fonction de coût total: $C_m(Q) = \frac{dC_T(Q)}{dQ} = C'_T(Q)$. [Dollo-Luiset (1996), p. xx].*
- *Ce taux marginal de substitution exprime donc la quantité additionnelle de capital que la firme devra utiliser pour compenser la perte d'une unité du facteur travail si elle désire, par ailleurs, maintenir inchangé son volume de production maximum: $r_{KL} = -\frac{DK}{DL}$ (production - q - constante), (r_{KL} est une expression positive puisque DK et DL sont de signes contraires). Graphiquement, en supposant des variations infiniment petites des quantités employées des facteurs de production, le taux marginal de substitution se représente par la valeur absolue de la pente de la tangente à l'isoquante au point correspondant à la combinaison de facteurs de production actuellement utilisée par la firme : $r_{KL} = \lim_{DL \rightarrow 0} \left(-\frac{DK}{DL}\right)$. [Jurion (1996), pp. 91-92].*
- *Lorsqu'un cours est indexé par un taux discret, les accroissements de cours seront des différences : $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$ ou $X_{t+n} - X_t$. Dans le cas d'un processus à temps continu, tous les écarts du type $\Delta X_t + X_{t+\Delta t} - X_t$, où Δ est un accroissement quelconque, sont possibles. Lorsque cela a un sens, nous noterons sous la forme de différentielle : $dX_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [X_{t+\Delta t} - X_t]$. [Kast - Lapied (1992), p. 58].*

Chapitre 6

Propriétés et applications des dérivées

6.1 Lectures préliminaires

- *Par cela seul que des fonctions mathématiques ou empiriques satisfont à la loi de continuité, elles jouissent de certaines propriétés générales qui sont d'une grande importance, non-seulement pour la théorie abstraite du calcul, mais bien plus encore pour l'interprétation des phénomènes naturels. (...) La première propriété consiste en ce que les variations de valeur que subit une fonction, à partir d'une valeur déterminée, sont sensiblement proportionnelles aux variations correspondantes de l'autre grandeur, quand ces variations sont très-petites. (...) L'autre propriété générale des fonctions continues, que nous voulons faire remarquer ici, consiste en ce que la valeur de la fonction reste sensiblement stationnaire dans le voisinage des valeurs "maxima" ou "minima". Ceci ressort encore de l'inspection des courbes : car, quand l'ordonnée d'une courbe, après avoir été croissante, devient décroissante (ce qui est le cas du "maximum"), ou bien au contraire, quand, après avoir été décroissante, elle vient à croître (auquel cas elle passe par un "minimum"), la tangente à la courbe devient parallèle aux abscisses. (...) La propriété que nous venons de reconnaître dans les valeurs "maxima" et "minima", trouve sans cesse son application dans la pratique, et notamment dans la mécanique industrielle, où il s'agit surtout d'apprécier la valeur d'une certaine grandeur, qui correspond à un "maximum" d'effet utile pour la même dépense d'argent ou de force, ou à un "minimum" de dépenses pour la production du même effet utile (Cournot, 1841, pp. 9-13)*

Si la fonction $F(p)$ est continue, elle jouira de la propriété commune à toutes les fonctions de cette nature, et sur laquelle repose tant d'applications importantes de l'analyse mathématique : les variations de la demande seront sensiblement proportionnelles aux variations de prix, tant que celles-ci seront de petites fractions du prix originaire. Supposons que, dans un pays comme la France, la consommation

de sucre soit de 100 millions de kilogrammes, quand le prix est de 2 fr. le kilogramme, et qu'on l'ait vue s'abaisser à 99 millions de kilogrammes, quand le prix s'est élevé à 2 fr. 10 cent. On pourra, sans erreur notable, évaluer à 98 millions de kilogrammes la consommation qui correspondrait au prix de 2 fr. 20 cent, et à 101 millions de kilogrammes la consommation correspondante au prix de 1 fr. 90 cent. On conçoit combien ce principe, qui n'est que la conséquence mathématique de la continuité des fonctions, peut faciliter les applications de la théorie, soit en simplifiant les expressions analytiques des lois qui régissent le mouvement des valeurs, soit en réduisant le nombre des données qu'il faudra emprunter à l'expérience, si la théorie devient assez avancée pour se prêter à des déterminations numériques. N'oublions pas d'observer que le principe énoncé ci-dessus peut à la rigueur admettre des exceptions, par la raison qu'une fonction continue peut, en quelques points de son cours, éprouver des solutions de continuité; mais (...) la triture du commerce tend à supprimer ces cas exceptionnels, en même temps que le mécanisme commercial modère les variations dans les prix et tend à les maintenir entre les limites qui facilitent l'application de la théorie. (...) Puisque la fonction $F(p)$ est continue, la fonction $pF(p)$ qui exprime la valeur totale de la quantité débitée annuellement le sera aussi. Cette fonction deviendrait nulle si p était nul, puisque la consommation d'une denrée reste toujours finie, même dans l'hypothèse d'une absolue gratuité. (...) La fonction $pF(p)$ s'évanouit encore quand p devient infini. (...) Donc, puisque la fonction $pF(p)$ va d'abord en croissant avec p , puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend maximum, et qui est donnée par l'équation $F(p) + pF'(p) = 0$ (1), F' désignant, suivant la notion de Lagrange, le coefficient différentiel de la fonction F . (...) Supposons que le prix étant devenu $p + \Delta p$, la consommation annuelle, accusée par des documents statistiques tels que les registres des douanes, soit devenue $D - \Delta D$, selon que l'on aura $\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p}$, ou $\frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p}$, l'accroissement de prix Δp devra augmenter ou diminuer le produit $pF(p)$; et l'on saura conséquemment si les deux valeurs $p, p + \Delta p$ (Δp étant censé une petite fraction de p) tombent en-deçà ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question. (...) Le raisonnement employé au commencement de l'article précédent montre bien que la fonction $pF(p)$ a nécessairement un maximum, mais elle pourrait en avoir plusieurs et passer dans l'intervalle par des valeurs minima. La racine de l'équation (1) correspond à un maximum ou à un minimum selon que $2F'(p) + pF''(p) < \text{ou} > 0$, ou bien, en substituant pour p sa valeur, et en ayant égard au signe essentiellement négatif de $F'(p)$, $2[F'(p)]^2 - F(p) \times F''(p) > \text{ou} < 0$. Par conséquent, lorsque $F''(p)$ est négatif, ou lorsque la courbe $D = F(p)$ tourne sa concavité du côté de l'axe des abscisses, il est impossible qu'il y ait un minimum, ni plus d'un maximum. Dans le cas contraire, l'existence de plusieurs minima et de plusieurs maxima n'est pas démontrée impossible. (Cournot, 1838, pp. 39 - 42)

- Non seulement le signe de la dérivée $f'(x)$ fait connaître si la fonction $f(x)$ éprouve un accroissement ou un décroissement pour des valeurs croissantes de x , mais encore la

valeur absolue de $f'x$ mesure la “rapidité” de l’accroissement ou du décroissement de fx . (...) Au reste, il est facile de définir mathématiquement l’idée que l’on se fait de la rapidité avec laquelle une fonction varie. D’abord, si $f'x$ était une quantité constante, ce qui suppose manifestement que fx est une fonction linéaire de la forme $ax + b$, fx varierait uniformément avec x , en ce sens qu’à des variations égales de x correspondraient des variations égales de fx , de même signe que celles de x ou du signe contraire, selon que a aurait le signe positif ou négatif. Dans ce cas, la dérivée $f'x$ n’étant autre chose que la constante a , ou que la tangente trigonométrique de l’angle que la droite $y = ax + b$ forme avec les x positifs, et les variations de fx qui correspondent à des variations égales de x se trouvant proportionnelles au nombre a , ce nombre mesure évidemment la rapidité avec laquelle fx varie, toujours par comparaison avec la variable x qui est censée varier d’une manière uniforme. Lorsque $y = fx$ cesse de désigner une fonction linéaire ou l’ordonnée d’une ligne droite, à des variations égales de x cessent de correspondre des variations égales de y . (...) Cette courbe MN tournera sa convexité ou sa concavité vers l’axe des abscisses, selon que la fonction $f'x$ ira en croissant ou en décroissant, ou selon que $f''x$ prendra une valeur positive ou négative. Il y aura inversion dans le sens de la courbure ou “inflexion” dans la courbe, lorsque $f''x$ changera de signe; et dans ce cas la première dérivée $f'x$ passera en général par un “maximum” ou par un “minimum”. (Cournot, 1841; pp. 53-55)

6.2 Développements théoriques

6.2.1 Théorèmes fondamentaux

Les résultats de base de la théorie des fonctions d’une variable réelle furent établis par quelques grands mathématiciens des siècles précédents, notamment Fermat (1601-1665), Rolle (1652-1719), Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857), de l’Hospital (1661-1704).

Théorème 6.2.1 (Théorème de Fermat) Soit f une fonction dérivable en un réel r . S’il existe un intervalle $]a, b[$ contenant r tel que $f(r) \geq f(x)$, $\forall x \in]a, b[$ (ou $f(r) \leq f(x)$, $\forall x \in]a, b[$), alors $f'(r) = 0$.

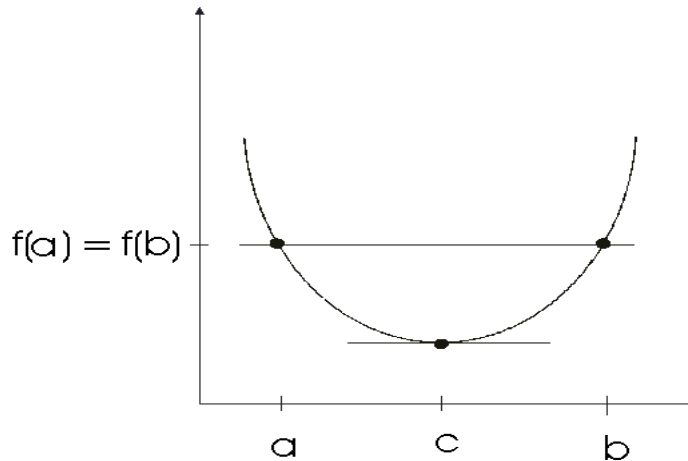
Preuve. Traitons uniquement le cas où $f(*x) \leq f(r)$, l’autre inégalité se traitant semblablement. Si $f'(r) \neq 0$, le graphe de f dans l’oculaire du microscope \mathcal{M} pointé vers le point $(r, f(r))$ et d’agrandissement ω infiniment grand positif est vu comme étant une droite oblique passant par l’origine du nouveau repère. On peut donc trouver des $*X$ appréciables tels que $f(*X) > 0$ (? 6.1), c’est-à-dire des points $*x$ de $H(r)$ tels que $f(*x) - f(r) > 0$ (? 6.2), ce qui est impossible (? 6.3). ■

Remarque. Nous verrons dans la section 6.2.3 que l’inégalité constituant l’hypothèse principale de ce théorème équivaut à dire que $f(r)$ est extremum local de f .

De cet énoncé découlent plusieurs théorèmes fondamentaux qui se réfèrent à des fonctions aimables sur un intervalle fermé.

La première situation intéressante concerne le cas où la fonction prend des valeurs égales aux extrémités de cet intervalle $[a, b]$: dans ce cas, la figure ?? suggère que le graphe de la fonction considérée possède une tangente horizontale.

Figure 6.1: Illustration du théorème de Rolle



Théorème 6.2.2 (Théorème de Rolle) Si f est aimable sur $[a, b]$, avec $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

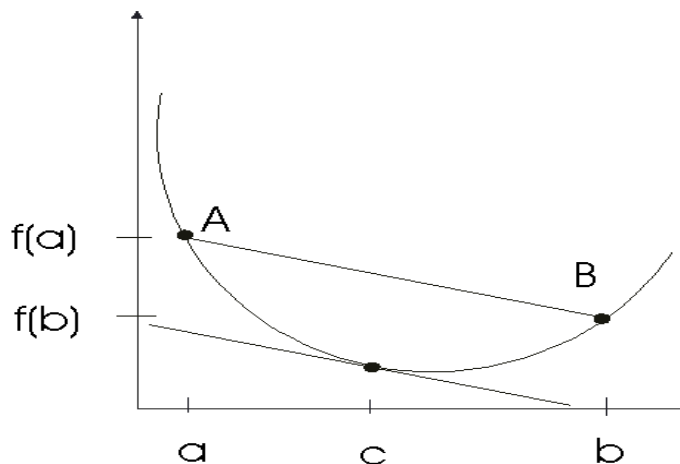
Preuve. Le résultat est trivial si $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in [a, b]$ (? 6.4). Sinon, le théorème de Weierstrass fournit un réel $c \in]a, b[$ (? 6.5) tel que $f(x) \geq f(c)$ (ou tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in [a, b]$ (? 6.6). Le théorème de Fermat permet de conclure (? 6.7). ■

- Remarques.*
1. Des exemples faciles à construire montrent l'utilité des hypothèses, et que le point c obtenu n'est pas forcément unique (? 6.8).
 2. L'interprétation géométrique de cet énoncé est aisée : la tangente à la courbe au point d'abscisse c est parallèle à l'axe des x ; un tel point en lequel le nombre dérivé de f s'annule est qualifié de *stationnaire* ou encore de *critique* pour f .
 3. Dans cet énoncé, ainsi que dans sa preuve, on portera une attention toute particulière sur le caractère ouvert ou fermé de l'intervalle considéré; on cherchera à comprendre pourquoi on fait appel à tel type d'intervalle.

Lagrange a généralisé le théorème de Rolle en supprimant l'hypothèse selon laquelle la fonction considérée prend des valeurs égales aux extrémités de l'intervalle. Géométriquement, la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ du graphe n'est

plus horizontale, mais il existe encore un point où la tangente est parallèle à cette droite (voir figure ??). Analytiquement, en égalant les coefficients angulaires de cette droite et de la tangente, on obtient une estimation de la variation $f(b) - f(a)$ de la fonction : il s'agit de la célèbre *formule des accroissements finis*.

Figure 6.2: Illustration de la formule des accroissements finis



Théorème 6.2.3 (Théorème de Lagrange ou formule des accroissements finis) Si f est aimable sur $[a, b]$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c).$$

Preuve. Il s'agit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie par

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a) - f(x). \quad (? \text{ 6.9}) \blacksquare$$

Remarques. 1. La fonction $F(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$ n'est rien d'autre que la fonction affine dont le graphe est la droite passant par les points A et B.

2. Sous l'hypothèse additionnelle $f(a) = f(b)$, la formule des accroissements finis redonne évidemment l'énoncé de Rolle.

3. Pour tous réels r et x tels que $r \in]a, b[$ et $r + x \in [a, b]$, le polynôme du premier degré donné par $P_1(x) = f(r) + (x - r) \times f'(r)$ possède même valeur et même dérivée que f en r ; de plus, pour tout hyperréel $*x \in H(r)$, st $\left(\frac{f(*x) - P_1(*x)}{*x - r} \right) = 0$ (? 6.10). Ce résultat sera généralisé ultérieurement par le théorème de Taylor.

Le théorème de Lagrange a été amélioré par Cauchy qui cherchait à caractériser le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ des variations de deux fonctions f et g . Lorsque $g(x) = x$ pour tout réel x , ce rapport se réduit bien entendu à l'expression $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ figurant dans la formule des accroissements finis.

Théorème 6.2.4 (Théorème de Cauchy) Si f et g sont aimables dans $[a, b]$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$[f(b) - f(a)] \times g'(c) = [g(b) - g(a)] \times f'(c).$$

Preuve. Il convient d'appliquer la formule des accroissements finis à la fonction h définie par

$$h(x) = [f(b) - f(a)] \times g(x) - [g(b) - g(a)] \times f(x). \quad (? \text{ 6.11}) \blacksquare$$

Une application importante du théorème de Cauchy est fournie par la célèbre règle du marquis de l'Hospital qui permet de lever de nombreuses indéterminations.

Théorème 6.2.5 (Règle de l'Hospital) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, r[$. Si

- $\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} g(x) = 0$,
- $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, r[$ et
- $\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est finie et est égale au réel l ,

alors $\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Preuve. Considérons les prolongements continus \bar{f} et \bar{g} de f et g dans $]a, r[$ (? 6.12). Pour tout $x \in]a, r[$, \bar{f} et \bar{g} sont aimables sur $[x, r]$ et telles que

$$\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(r)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(r)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (? \text{ 6.13}).$$

Le théorème de Cauchy livre un point $c \in]x, r[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (? \text{ 6.14}).$$

Pour $*x$ infiniment proche mais inférieur à r , c est également infiniment proche de r (? 6.15), d'où

$$\text{st} \left(\frac{f(*x)}{g(*x)} \right) = \text{st} \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} \right) = l \quad (? \text{ 6.16}). \blacksquare$$

Remarques. 1. Cette règle est également valable dans le cas de limites par valeurs supérieures, de limites à distance finie ou à distance infinie (c'est-à-dire aussi bien pour $x \rightarrow r^-$, $x \rightarrow r^+$, $x \rightarrow r$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$). On peut aussi l'appliquer au cas où f et g tendent toutes deux non pas vers 0 mais vers l'infini.

2. Il est quelquefois nécessaire d'itérer plusieurs fois ce résultat.

3. Cette règle n'est pas l'unique moyen pour lever des indéterminations : dans certaines situations, un recours à un développement de Taylor s'avère plus efficace ainsi que nous le verrons ultérieurement.

Applications. • Sachant que les fonctions CES (à élasticité de substitution constante) peuvent s'écrire sous la forme

$$q_b = A \left(ax^{-b} + (1-a)y^{-b} \right)^{-\frac{1}{b}},$$

où $A > 0$ et $0 < a < 1$, la fonction de production de Cobb-Douglas $q = Ax^a y^{1-a}$ est un cas limite d'une fonction CES. (? 6.17)

- Soit i le taux d'intérêt composé périodique. On suppose la période de référence divisée en k sous-périodes (de même durée), on note i_k le taux relatif à une sous-période et équivalent à i , et j_k le taux nominal périodique correspondant à i , alors

$$j_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} j_k = \ln(1+i). \quad (? 6.18)$$

6.2.2 Approximations

Le problème est le suivant: connaissant la valeur d'une fonction f en un réel r , peut-on estimer raisonnablement la valeur de $f(x)$ pour x "suffisamment voisin" de r ?

La continuité de f en r permet une première approximation, dite d'ordre 0, puisqu'alors on peut écrire $f(x) = f(r) + d_0(x)$, où la différence $d_0(x)$ est infiniment petite lorsque x est infiniment proche de r . En d'autres termes, on peut, en première approximation, considérer la fonction f comme (presque) constante au voisinage de r , ce qui équivaut alors à remplacer le graphe de f par la droite horizontale d'ordonnée $f(r)$.

La différentiabilité de f en r livre une meilleure approximation, qualifiée d'ordre 1 car elle fait appel à une fonction affine (c'est-à-dire du premier degré) : en effet, on peut alors écrire $f(x) = f(r) + (x-r) \times [f'(r) + d_1(x)]$, avec $d_1(x)$ infiniment petit lorsque x est infiniment proche de r . Graphiquement, on approche ainsi le graphe de f par la droite tangente à la courbe au point d'abscisse r . Cette approximation d'ordre 1 est particulièrement intéressante, non seulement parce qu'elle se révèle assez réaliste pour des petites perturbations de la variable autour de r , mais aussi parce qu'elle est très facile à calculer à partir du nombre dérivé $f'(r)$; elle possède de plus des propriétés mathématiques simples et remarquables : les approximations des variations de f sont alors (presque) proportionnelles et linéaires par rapport aux variations de la variable.

Modélisation

Considérons la production d'un bien et désignons par f le coût total et par x la quantité produite : on peut écrire $C = f(x)$.

Adopter l'approximation d'ordre 0 revient à ne considérer que les coûts fixes (et non les coûts variables).

L'approximation d'ordre 1 consiste à tenir compte, en plus des frais fixes, des frais variables en supposant que chaque unité est produite au même coût unitaire. Toutefois, pour tenir compte des économies d'échelle, puis des dés-économies d'échelle, on doit faire appel à des modèles plus élaborés et on a souvent recours à des polynômes du deuxième et du troisième degré respectivement.

Plus généralement, on cherche à estimer la valeur de $f(x)$, pour x "assez voisin" de r , à l'aide d'un polynôme en x . Ceci est intéressant dans la mesure où les polynômes sont beaucoup plus faciles à manipuler que des fonctions quelconques : en effet, leurs valeurs s'obtiennent à l'aide uniquement d'additions et de multiplications de nombres réels (ce que réalisent très aisément les machines à calculer), tandis que le calcul de leurs dérivées, zéros, limites, ... s'effectue fort simplement.

Notre but est donc de construire un polynôme P_n , de degré entier n qui fournisse une "bonne" approximation de f ; nous exigerons dès lors que ce polynôme possède même valeur que f en r (approximation d'ordre 0), même dérivée première que f en r (approximation d'ordre 1), même dérivée deuxième que f en r (approximation d'ordre 2), ... ; plus généralement, même dérivée p -ème que f en r (approximation d'ordre p) pour tout entier p compris entre 0 et n (la dérivée d'ordre nul correspondant à la valeur de la fonction considérée).

Proposition 6.2.6 *Un polynôme $P_n(x) = A_n(x-r)^n + A_{n-1}(x-r)^{n-1} + \dots + A_0$ possède même dérivée k -ème qu'une fonction f en r ssi les coefficients de ce polynôme s'écrivent sous la forme :*

$$A_k = \frac{f^{(k)}(r)}{k!}.$$

Preuve. Les conditions imposées aux dérivées successives conduisent naturellement à la forme proposée pour les coefficients du polynôme. (? 6.19a). D'autre part, il est aisé de vérifier que le polynôme

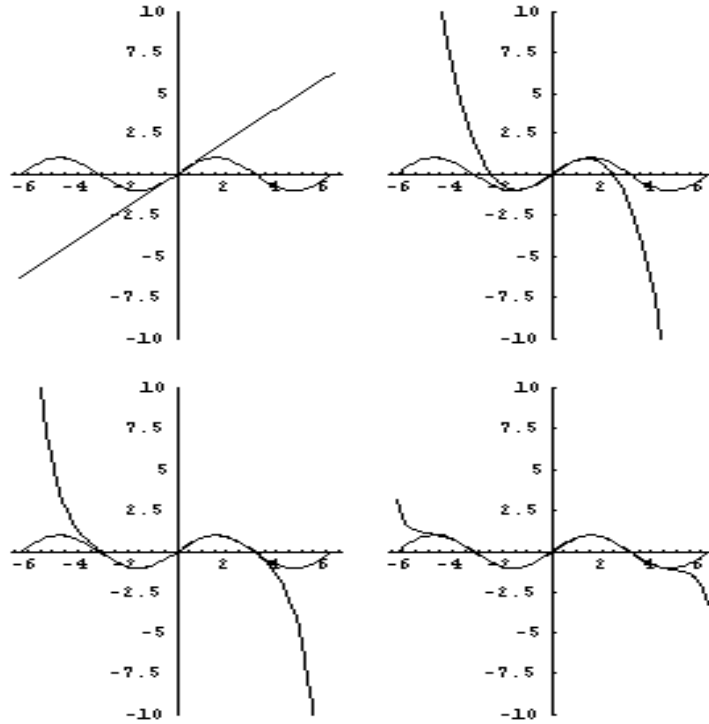
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{k!} (x-r)^k f^{(k)}(r) \right]$$

possède les mêmes dérivées successives que f en r . (? 6.19b)

Bien entendu, on peut toujours écrire

$$f(x) = P_n(x) + (x-r)^n d_n(x). (? 6.19c)$$

Figure 6.3: Illustration du théorème de Taylor



En appliquant n fois successivement la règle de l'Hospital aux fonctions $f(x) - P_n(x)$ et $(x - r)^n$, il est facile de vérifier que $d_n(*x)$ est infiniment petit dès que $*x$ est infiniment proche de r (? 6.20). Bien plus, Taylor a montré que $f(x) - P_n(x)$ est de la forme

$$\frac{(x - r)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

pour un point c compris entre r et x , ce qui généralise la formule des accroissements finis (correspondant au cas où $n = 0$); cette différence a donc la même forme qu'aurait le dernier terme du polynôme P_{n+1} , à ceci près que la dérivée $(n + 1)$ -ème de f est prise non pas en r mais en un point c inconnu. Voici l'énoncé précis et la preuve de ce résultat important.

Théorème 6.2.7 (Théorème de Taylor) *Soient I un intervalle ouvert dans lequel f est $n + 1$ fois continûment dérivable, et r un réel dans I . Pour tout x distinct de r et situé dans I , il existe un réel c compris entre x et r tel que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x - r)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve. Posons

$$F(x) = f(x) - P_n(x), \quad G(x) = (x - r)^{n+1} \text{ et } Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

On a $F^{(k)}(r) = G^{(k)}(r) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$ (? 6.21). En exploitant une première fois le théorème de Cauchy, on trouve un réel c_1 compris entre x et r tel que $Q(x) = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$ (? 6.22). Une deuxième application du théorème de Cauchy livre un point c_2 compris entre c_1 et r , donc entre x et r , tel que $Q(x) = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$ (? 6.23). On recommence ce raisonnement jusqu'à obtenir un réel c_{n+1} compris entre x et r tel que

$$Q(x) = \frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{G^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} \quad (? 6.24).$$

On conclut en posant $c = c_{n+1}$. ■

Remarques. 1. Le polynôme P_n est appelé le *développement de Taylor d'ordre n* de f selon les puissances de $x - r$. L'égalité

$$f(x) = f(r) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (x - r)^k f^{(k)}(r) + \frac{(x - r)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

porte fréquemment le nom de *formule de Taylor*.

2. L'expression $R_n = \frac{(x-r)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(c)$ est appelée le *reste de Lagrange* du développement. Comme le reste contient la puissance la plus élevée de $x - r$, il devient petit par rapport aux autres termes du développement si x est proche de r ; en particulier, si *x est infiniment proche de r ,

$$\text{st} \left(\frac{R_n({}^*x)}{({}^*x - r)^n} \right) = 0.$$

On se contente de noter $R_n(x)$ sous la forme $\lambda \times (x - r)^{n+1}$ avec λ borné au voisinage de r , ou encore sous la forme $\varepsilon \times (x - r)^n$ avec ε tendant vers 0 lorsque x tend vers r , ou encore simplement par des "petits points".

3. En appelant h la différence $x - r$, la formule de Taylor s'écrit sous la forme répandue suivante :

$$f(r + h) = f(r) + \frac{h}{1!} f'(r) + \frac{h^2}{2!} f''(r) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(r) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(r + \theta h)$$

pour un réel θ de l'intervalle $]0, 1[$.

4. Lorsque $r = 0$, la formule de Taylor porte le nom de *formule de Mac Laurin* et s'écrit alors sous la forme

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

pour un réel θ de l'intervalle $]0, 1[$.

Les développements de MacLaurin des principales fonctions élémentaires sont faciles à établir (? 6.25a); ils doivent être connus et sont résumés dans ce petit formulaire :

Pour tout réel x , il existe un réel θ de $]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+3}}{(2p+3)!} \cos \theta x \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \cos \theta x. \end{aligned}$$

Pour tout réel x supérieur à -1 et pour m constant quelconque, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \\ (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \\ &\quad + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n-m+1}}. \end{aligned}$$

Remarques. 1. Ces diverses formules peuvent évidemment être combinées entre elles pour obtenir le développement de nombreuses fonctions construites à partir de ces fonctions élémentaires.

2. Le développement de Mac-Laurin de e^x permet de montrer que le nombre e est irrationnel. (? 6.25b)

Application. Ces formules s'avèrent utiles pour lever de nombreuses indéterminations. Le principe est en effet simple : il consiste à remplacer certaines fonctions par les premiers termes de leur développement de Taylor, c'est-à-dire par des polynômes; il convient alors de sélectionner de manière appropriée l'ordre des développements, en choisissant chaque fois l'ordre minimum (pour éviter de faire des calculs superflus), mais sans s'arrêter trop tôt (pour ne pas commettre des erreurs).

6.2.3 Optimisation

De nombreuses démarches économiques consistent à exploiter au mieux les ressources disponibles. Mathématiquement, il s'agit alors de résoudre un problème d'optimisation, c'est-à-dire de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction (qui sera ici supposée à une seule variable).

Insistons avant tout sur le vocabulaire préconisé (car il est trop souvent malmené), en distinguant les valeurs optimales prises par la fonction à optimiser (encore appelée *fonction économique* ou *objectif*) des points (ou valeurs de la variable) en lesquels ces valeurs optimales son atteintes.

Définition 6.2.8 Soient f une fonction définie sur un domaine D et I un intervalle inclus dans D .

- On appelle *maximum* (resp. *minimum*) de f dans I la plus grande (resp. la plus petite) valeur prise par f dans I ; il existe alors un réel r appartenant à I tel que $f(x) \leq f(r)$ (resp. $f(x) \geq f(r)$) pour tout x de I ; ce réel r est un *maximant* (resp. un *minimant*) de f dans I et $f(r)$ est le *maximum* (resp. *minimum*) en question.
- Un *maximum* (resp. *minimum*; *maximant*; *minimant*) est qualifié de *strict* lorsque le signe d'inégalité large (\leq ou \geq) est remplacé par le signe strict correspondant ($<$ ou $>$) pour tout x dans I mais différent de r .
- Un *extremum* ou *optimum* (resp. un *extrémant*) est soit un *maximum*, soit un *minimum* (resp. un *maximant* ou un *minimant*).

Remarques. 1. Le suffixe latin “um” est réservé aux valeurs de la fonction, tandis que le suffixe “ant” concerne les valeurs prises par la variable.

2. Le pluriel du mot “extremum” (resp. maximum; minimum) est “extrema” (resp. maxima; minima).
3. Sous réserve d'existence, le maximum (resp. minimum; maximant strict; minimant strict) de f dans I est unique, ce qui justifie l'usage dans ce cas de l'article défini “le”. Par contre, le mot extrémant doit être généralement précédé d'un article indéfini “un” car un même extremum peut être atteint en plusieurs extrémants.
4. La valeur d'un extremum éventuel dépend bien entendu de la fonction f , mais également de l'intervalle I sur lequel on travaille.

On attribue souvent le qualificatif de *global* ou encore d'*absolu* au mot maximum (resp. minimum; maximant; minimant), éventuellement strict. Cela n'est toutefois pas indispensable, mais est commode pour distinguer le “vrai extremum” de la notion *locale* qui se définit comme suit :

Définition 6.2.9 Soient f une fonction définie sur D et r un réel intérieur à D ; $f(r)$ est un *maximum* (resp. *minimum*) local, éventuellement strict, de f lorsqu'il existe un intervalle $]a, b[\subset D$ contenant r tel que r soit un *maximant* (resp. un *minimant*), éventuellement strict, de f dans $]a, b[$; dans ce cas, r est appelé un *maximant* (resp. un *minimant*) *local*, éventuellement strict, de f .

Proposition 6.2.10 Un réel r est *extrémant local* de f si et seulement si r est *extrémant* de f dans $H(r)$.

Preuve. La condition nécessaire est évidente. Procédons par l'absurde pour démontrer la condition suffisante dans le cas d'un maximum, le cas d'un minimum se traitant de manière équivalente (? 6.). L'hypothèse s'écrit

$$\forall *x \in H(r), f(r) \geq f(*x).$$

Supposons que

$$\forall I \ni r, \exists x \in I \text{ tel que } f(r) < f(x). \text{ (? 6.)}$$

Une application de la règle de transfert conduit à contredire l'hypothèse (? 6.).

- Remarques.*
1. Ces notions d'extremum et d'extrémant locaux sont intrinsèques à la fonction considérée.
 2. Une même fonction f peut posséder plusieurs extrema (et plusieurs extrémants) locaux, même stricts. C'est pourquoi, les mots "extremum local" doivent toujours être précédés d'un article indéfini.

Dans la pratique, les extrema locaux n'ont aucun intérêt véritable, puisqu'il s'agit concrètement de toujours rechercher un extremum absolu. Toutefois, la recherche du "vrai" extremum passe obligatoirement par l'étape locale, aisée à réaliser : il est en effet très facile de repérer les points "candidats à être un extrémant local". On dispose pour cela de ce résultat :

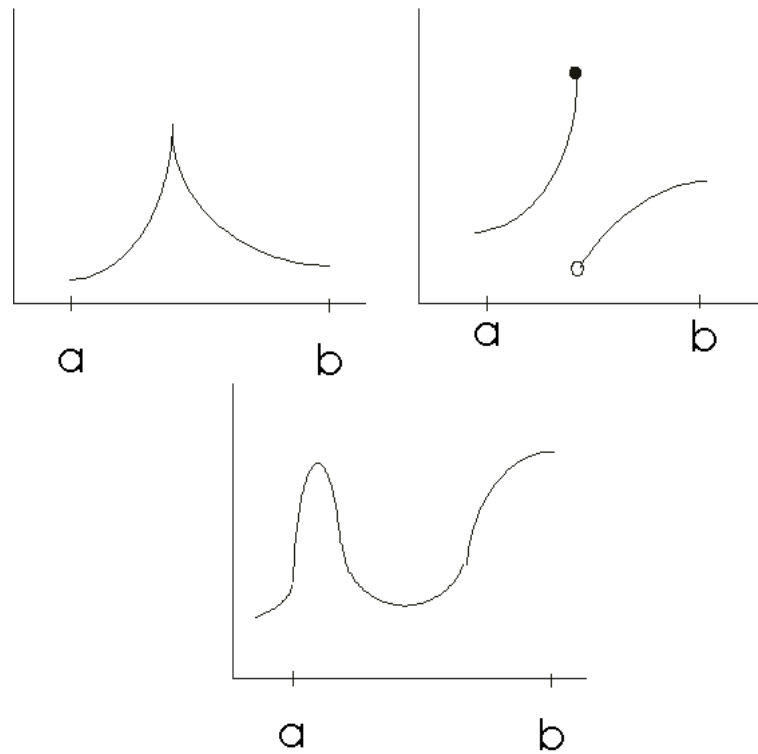
Proposition 6.2.11 (Règle de repérage des extrémants) *Si r est un extrémant de f sur un intervalle I , soit il coïncide avec une extrémité de I , soit c'est un extrémant local de f ; dans ce dernier cas, il est soit un point où f n'est pas dérivable soit un point stationnaire pour f .*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème de Fermat (? 6.26). ■

- Remarques.*
1. Insistons sur le fait qu'un extremum d'une fonction f peut être atteint en un point où la dérivée de f ne s'annule pas : il peut s'agir alors soit d'un point de non dérivabilité, soit d'une extrémité de l'intervalle sur lequel on travaille. Pour trouver un extremum, il ne suffit donc généralement pas d'annuler la dérivée de l'objectif, ainsi qu'en attestent ces quelques exemples simples (figure ??):
 2. Cet énoncé permet de repérer les points susceptibles de fournir un extremum. Il donne en fait des conditions nécessaires, mais pas suffisantes, pour qu'un point soit extrémant : celles-ci sont appelées *conditions du premier ordre* car elles font appel à la dérivée première de la fonction à optimiser.

Cette règle de repérage est la même pour trouver un maximum ou un minimum. Par ailleurs, elle est vérifiée par des points qui ne sont ni des maximants, ni des minimants locaux, par exemple par des points d'inflexion à tangente horizontale.

Figure 6.4: Dérivée et extrema



Il s'avère dès lors indispensable de “sélectionner” les points repérés. A cet effet, la première façon de travailler consiste à observer le comportement de l'objectif f près du point r repéré. Intuitivement, si le graphe de f monte (resp. descend) avant r , puis descend (resp. monte) après r , il est clair que ce point r sera un maximant (resp. minimant) local pour f . En d'autres termes, il s'agit de regarder si f est monotone dans un voisinage (et même uniquement dans le halo) de r . Un examen du graphe dans l'oculaire du microscope infiniment puissant $\mathcal{M}_\omega^{(r, f(r))}$ montre que la monotonie de f dans le halo de r dépend du signe du nombre dérivé $f'(r)$. Précisons ce résultat en caractérisant les fonctions croissantes ou décroissantes sur un intervalle réel, dans les cas d'une monotonie large ou stricte.

Proposition 6.2.12 (Fonctions monotones ou strictement monotones) *Soit f une fonction aimable dans $[a, b]$.*

- f est croissante dans $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]a, b[$.
- f est décroissante dans $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $]a, b[$.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de $]a, b[$, alors f est strictement croissante dans $[a, b]$.

- Si $f'(x) < 0$ pour tout x de $]a, b[$, alors f est strictement décroissante dans $[a, b]$.

Preuve. Il suffit de considérer le cas de la croissance (? 6.27). Si f est croissante dans $[a, b]$, alors, pour tout $r \in]a, b[$, la droite vue dans l'oculaire de $\mathcal{M}_\omega^{(r, f(r))}$ possède un coefficient angulaire non négatif, ce qui montre que $f'(r) \geq 0$ (? 6.28).

Réciproquement, supposons que $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]a, b[$ et considérons deux réels x_1 et x_2 de $]a, b[$, avec $x_1 < x_2$. La formule des accroissements finis livre un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \times f'(c)$. Comme $f'(c) \geq 0$, on en déduit que $f(x_1) \leq f(x_2)$ (? 6.29). Le cas de la stricte croissante se règle de la même manière (? 6.30). ■

Remarque. Nous avons donné une condition suffisante pour reconnaître une fonction strictement monotone. Insistons sur le fait que cette condition n'est nullement nécessaire ainsi qu'en atteste l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante dans \mathbb{R} et qui possède néanmoins une dérivée nulle en 0.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer une première règle pour sélectionner un point repéré et déterminer s'il s'agit d'un maximant ou d'un minimant; elle vaut pour tout point repéré :

Règle 6.2.13 (Première règle de sélection des extrémants locaux) *Soit r un point repéré, c'est-à-dire un point stationnaire ou un point de non dérivabilité pour f . Si*

$$f'(*x) < 0 \text{ (resp. } > 0), \forall *x \lesssim r \text{ et } f'(*x) > 0 \text{ (resp. } < 0), \forall *x \gtrsim r,$$

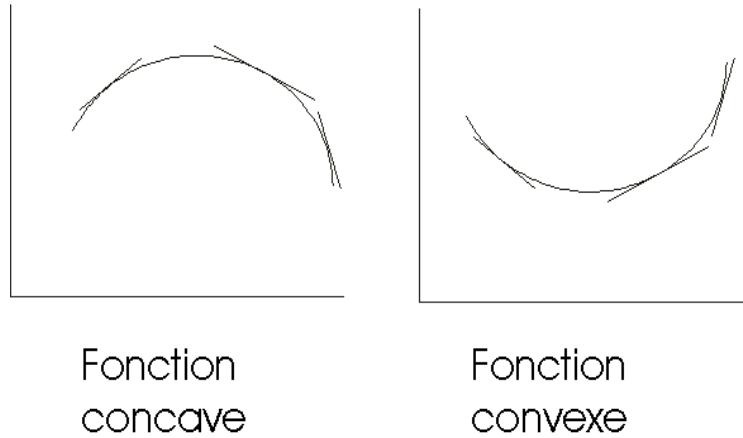
alors r est un minimant (resp. maximant) local de f ; si f' garde un signe constant en tout point de $H(r)$, r n'est pas un extrémant local.

Preuve. Si la fonction est décroissante avant r , puis croissante après r , $f(r)$ est un minimant local (? 6.31). ■

Cette règle de sélection s'avère efficace pour autant que l'on sache déterminer aisément le signe de la dérivée de f sur tout un intervalle (sauf éventuellement au point repéré où elle peut ne pas exister).

On peut conclure plus rapidement en cas de différentiabilité, puisqu'il suffit de connaître la position de la courbe par rapport à la tangente au point considéré. En effet, puisque cette dernière est obligatoirement horizontale en l'abscisse repérée r , on est en présence d'un minimum (resp. maximum) local lorsque le graphe de f est situé au-dessus (resp. en-dessous) de cette tangente, c'est-à-dire selon que le graphe de f tourne en l'abscisse r sa concavité vers le haut (resp. vers le bas), ce qui équivaut encore à dire que f est *convexe* (resp. *concave*) dans un voisinage de r (figure ??).

Figure 6.5: Position de la tangente par rapport à une fonction concave et à une fonction convexe



Définition 6.2.14 Une fonction f aimable sur $I = [a, b]$ est dite convexe (resp. concave) sur I lorsque le graphe de f est situé au-dessus (resp. en-dessous) de ou sur la tangente en tout point de $]a, b[$: formellement, pour tout $r \in]a, b[$ et $x \in I$,

$$f(x) \geq f(r) + (x - r) \times f'(r) \text{ (resp. } f(x) \leq f(r) + (x - r) \times f'(r)\text{)};$$

si l'inégalité large est remplacée par l'inégalité stricte correspondante et que $x \neq r$, on parle de convexité (resp. concavité) stricte.

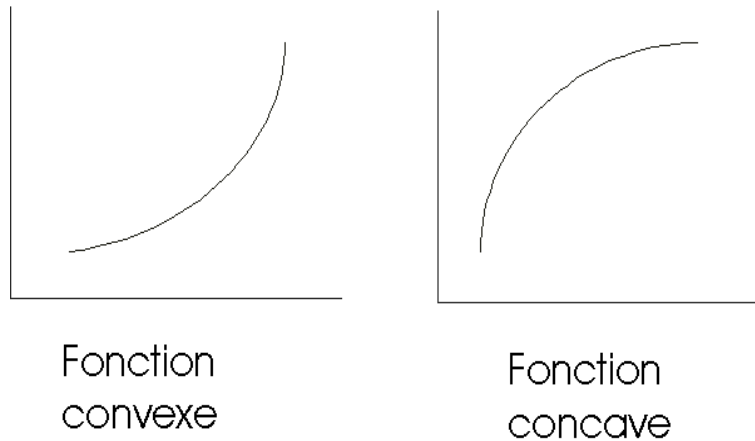
Remarque. On peut définir la convexité (resp. concavité) pour une fonction non dérivable; il suffit de comparer la position du graphe par rapport à toute corde joignant deux points du graphe : une fonction f est dite convexe (resp. concave) sur un intervalle I (inclus dans le domaine de définition) lorsque la portion du graphe de f entre deux quelconques de ses points est entièrement située en-dessous ou sur (resp. au-dessus ou sur) la corde joignant ces deux points; cela se traduit formellement comme suit : f est convexe (resp. concave) sur I quand, pour tous points x, y, z de I avec $x < z < y$ et $z = tx + (1 - t)y$ pour $t \in]0, 1[$, $f(z) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ (resp. $f(z) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$)

Un examen du graphe nous fait pressentir un lien entre la convexité (resp. concavité) de f et la monotonie de f' . Considérons par exemple deux fonctions croissantes, la première convexe et la seconde concave (figure ??); la dérivée de chacune de ces fonctions est positive, mais la vitesse de croissance augmente dans le premier cas, tandis qu'elle diminue dans le second.

Tout ceci est confirmé par cet énoncé valable pour une fonction aimable sur un intervalle :

Proposition 6.2.15 (Monotonie de la dérivée première) Soit f une fonction aimable sur $[a, b]$.

Figure 6.6: Fonctions croissantes, convexe et concave



- La dérivée f' est croissante dans $]a, b[$ si et seulement si la fonction f est convexe sur $[a, b]$.
- La dérivée f' est décroissante dans $]a, b[$ si et seulement si la fonction f est concave sur $[a, b]$.
- Des énoncés similaires valent dans le cas de la stricte monotonie de f' .

Preuve. Contentons-nous de ne considérer que le cas de la croissance de la dérivée (? 6.32). Si f' est croissante dans $]a, b[$, le théorème de Lagrange permet d'écrire, pour tout $r \in]a, b[$ et tout $x \in [a, b] \setminus \{r\}$,

$$f(x) = f(r) + (x - r) \times f'(c)$$

pour un réel c compris entre x et r . Selon que x est inférieur ou égal ou supérieur ou égal à r , $f'(c)$ est inférieur ou supérieur à $f'(r)$ (? 6.33), ce qui permet de conclure (? 6.34).

Réciproquement, si $x_1 < x_2$, des inégalités $f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2) \times f'(x_2)$ et $f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1) \times f'(x_1)$, on déduit la croissance de f en sommant les deux inégalités membre à membre. On obtient en effet

$$0 \geq (x_1 - x_2)(f'(x_2) - f'(x_1)) \quad (?6.35),$$

d'où la conclusion (? 6.36). ■

Comme la monotonie d'une fonction se caractérise aisément par le signe de sa dérivée première, la convexité ou concavité de f dépend du signe de la dérivée deuxième f'' , pour autant que celle-ci existe :

Proposition 6.2.16 (Caractérisation de la convexité ou concavité pour une fonction deux fois dérivable) Soit f une fonction continue dans $[a, b]$ et deux fois dérivable dans $]a, b[$.

- f est convexe dans $]a, b[$ si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de $]a, b[$.
- f est concave dans $]a, b[$ si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de $]a, b[$.
- Si $f''(x) > 0$ pour tout x de $]a, b[$, alors f est strictement convexe dans $]a, b[$.
- Si $f''(x) < 0$ pour tout x de $]a, b[$, alors f est strictement concave dans $]a, b[$.

Preuve. Cela résulte directement des caractérisations de la monotonie d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée et de la concavité ou convexité d'une fonction par rapport à la monotonie de sa dérivée. (? 6.37) ■

- Remarques.*
1. Insistons sur le fait que la condition énoncée dans la dernière partie de l'énoncé suffit pour caractériser la stricte convexité ou concavité, mais n'est pas nécessaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^4$ est partout strictement convexe, bien que sa dérivée seconde s'annule en 0.
 2. Il résulte de ce théorème qu'un *point d'inflexion* pour f (supposée deux fois dérivable) dans $]a, b[$, c'est-à-dire un point où f change de concavité, est nécessairement un point qui annule la dérivée deuxième avec un changement de signe. Ainsi, un point d'inflexion pour f équivaut à un extrémant local pour f' (? 6.38).

Ces notions de convexité et de concavité nous conduisent à une deuxième règle pour sélectionner un point déclaré candidat à être un extrémant local. Elle fait appel au signe de la dérivée deuxième de l'objectif f au seul point repéré r . En comparaison avec la première méthode de sélection, celle-ci possède l'avantage de calculer la dérivée en un seul point, mais a les inconvénients de faire appel à des dérivées d'ordre plus élevé que 1 et, surtout, de ne prendre en charge que les points stationnaires de f (et non les éventuels points de non dérivabilité) :

Proposition 6.2.17 (Deuxième méthode de sélection pour les extrema locaux) Soit f une fonction deux fois dérivable en un point stationnaire r . Si $f''(r) < 0$ (resp. $f''(r) > 0$), alors r est un maximant (resp. minimant) local strict pour f .

Preuve. Considérons uniquement le cas d'un maximum (? 6.39). Dans le halo $H(r)$, f est strictement concave (? 6.40); dès lors, pour tout hyperréel $*x$ infiniment proche de r , $f(*x) < f(r)$ (? 6.41), d'où la conclusion (? 6.42).

- Remarques.*
1. Cet énoncé fournit une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un point soit un extrémant local pour f . On la baptise parfois *condition du second ordre* car elle fait appel à la dérivée deuxième de f en r .

2. Lorsque $f''(r) = 0$, il s'agit de regarder l'ordre n le plus petit tel que $f^{(n)}(r) \neq 0$: on a donc $f^{(k)}(r) = 0$ pour tout entier k compris entre 2 et $n - 1$, avec $f^{(n)}(r) \neq 0$. Moyennant les hypothèses adéquates, on peut faire appel au développement de Taylor d'ordre n de f au voisinage du point r et l'on en déduit cette règle (? 6.43) : r est un extrémant local pour f si et seulement si n est pair; il s'agit alors d'un maximant ou d'un minimant local strict selon que $f^{(n)}(r)$ est respectivement négatif ou positif.

Nous sommes à présent en mesure de décrire la démarche complète pour trouver un extremum global d'un objectif f sur un intervalle I .

Il s'agit tout d'abord de réaliser l'étude locale, puisque l'éventuel maximum (resp. minimum) absolu de f sur I peut être atteint en un maximant (resp. minimant) local de f . On en déduit ensuite les conclusions globales. Concrètement, on procède comme suit :

Méthode pour rechercher des éventuels extrema globaux de f sur un intervalle I

- Phase 1 : Etude locale.
 1. Repérage : on repère les points situés à l'intérieur de I et qui sont stationnaires ou de non dérivabilité pour f .
 2. Sélection :
 - a) Première méthode à l'aide du signe de la dérivée f' de part et d'autre de chaque point repéré.
 - b) Deuxième méthode par le signe de la dérivée seconde de f au point repéré (pour autant qu'il soit stationnaire et que cette dérivée seconde ne soit pas nulle).

- Phase 2 : Conclusion globale.

Comparer :

- les valeurs prises par f aux extrémants locaux trouvés dans la première phase,
- les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ aux extrémités a et b de I pour autant qu'elles appartiennent à I ,
- les valeurs de f aux éventuels points de discontinuité.

Sous réserve d'existence, le maximum (resp. le minimum) global de f sur I est la plus grande (resp. la plus petite) de ces valeurs.

Remarques. 1. Le maximum (resp. minimum) de f sur I n'existe pas toujours. Toutefois, le théorème de Weierstrass garantit son existence dans le cas, courant, où f est continue et I un intervalle compact (c'est-à-dire fermé et borné).

2. Insistons une nouvelle fois sur le fait que l'étude locale ne suffit pas pour trouver une réponse globale, même dans des cas concrets. Il est en effet aisé de construire des fonctions possédant des extrema locaux qui sont loin de fournir la réponse globale souhaitée comme l'a illustré la figure ??

Applications. Minimisation de la somme des écarts absolus relatifs aux valeurs d'une série statistique simple univariée. (? 6.44)

Minimisation de la somme des carrés des écarts relatifs aux valeurs d'une série statistique simple univariée

Dans certaines situations, on peut déduire une réponse globale directement après avoir réalisé l'étude locale. Il en est ainsi sous l'hypothèse de concavité ou de convexité de la fonction considérée :

Proposition 6.2.18 (Extrema d'une fonction concave ou convexe) *Soit f une fonction aimable et concave (resp. convexe) dans un intervalle I . Si r est un point stationnaire de f situé dans l'intérieur de I , alors $f(r)$ est le maximum (resp. le minimum) global de f sur I .*

Preuve. Pour f concave, on sait que $\forall x \in I, f(x) \leq f(r) + (x-r)f'(r)$; la conclusion en découle instantanément (? 6.45). ■

Il existe une autre circonstance, assez souvent rencontrée dans la pratique, dans laquelle une solution locale est automatiquement globale : dans ce cas, il n'y a aucun "souci" à se faire puisque l'on peut conclure globalement après avoir réalisé l'étude locale.

Théorème 6.2.19 (Théorème d'insouciance) *Si une fonction f , continue dans un intervalle I , possède dans l'intérieur de I un seul extrémant local, celui-ci fournit l'extremum global strict de même sens pour f dans I , tandis que l'extremum de sens contraire ne peut être atteint qu'en une extrémité de I .*

Preuve. Supposons que r soit l'unique extrémant local de f dans l'intérieur de I et qu'il s'agisse d'un maximant local. Si a est un réel de I et est inférieur à r , le minimum de f sur $[a, r]$ ne peut être atteint qu'en a et le maximum qu'en r , avec obligatoirement $f(a) < f(r)$ (? 6.46). Comme un raisonnement similaire peut être tenu à droite de r , on en conclut que $f(r)$ est le maximum strict de f sur I . De son côté, le minimum de f dans I ne peut être atteint, s'il existe, qu'en une extrémité de I appartenant à I (? 6.47).

Remarque. L'hypothèse d'unicité de l'extrémant local est fondamentale. Il est possible de construire des exemples de fonctions ne contenant, dans un intervalle donné, qu'un seul maximant local et qu'un seul minimant local, mais dont le maximum ou le minimum global est atteint en une extrémité de I : dans ce cas, il existe deux extrémants locaux dans l'intervalle considéré (exemple: deuxième illustration de la figure ??).

Chapitre 7

Intégration

7.1 Lectures préliminaires

- *Le calcul différentiel est la première branche du calcul infinitésimal, la seconde s'appelle le calcul intégral. Nous venons d'expliquer en quoi consiste le calcul différentiel. Que fait le calcul intégral ? Il donne le moyen de remonter, lorsque cela se peut, de la limite du rapport entre les différences des quantités finies, au rapport même de ces quantités. [D'Alembert (1759), cité par Gaud - Guichard - Sicre - Chrétien (1998), p. 128].*
- *Une intégrale étant considérée comme la somme des éléments qu'on nomme différentielles, on est convenu de la désigner dans le calcul par la caractéristique \int qui est regardée comme l'abréviation des mots somme de . Ainsi le signe \int détruit l'effet du signal d de manière que $\int dx$ n'est autre chose que la quantité x elle-même. [Carnot, cité par Gaud - Guichard - Sicre - Chrétien (1998), p. 13].*
- *D'une façon générale, on peut dire qu'un surplus est un avantage résultant de la différence positive entre ce que l'on est disposé à payer et le prix du marché si on est acheteur sur ce marché. ... Si vous vous sentez un peu faible à la lecture de cet ouvrage, vous serez peut-être tenté de vous requinquer avec du chocolat ... Le bien étant non divisible vous pouvez acheter une, deux, ... tablettes de chocolat, mais pas 1,084 tablette. Si vous êtes disposé à payer une tablette 10F et qu'elle ne coûte que 5F, la première tablette vous procure un surplus de 5F. Les tablettes étant petites peut-être voudrez-vous en acheter une deuxième. Mais comme vous en avez déjà le besoin est moins pressant. Supposons alors que vous ne soyez disposé à payer la deuxième que 9F. Le prix étant toujours 5F votre surplus sur la deuxième tablette est de 4F. Si vous acceptez de payer la troisième tablette 7F, la quatrième 5F et la cinquième 4F, vous n'acheterez que 4 tablettes car vous ne trouverez pas sur le marché de tablettes à 4F. Au total l'achat de 4 tablettes vous coûte 20F alors que vous étiez prêt à payer 31 F. Le surplus pour les 4 tablettes de chocolat est donc de*

11F, soit $(10 - 5) \times 1 + (9 - 5) \times 1 + (7 - 5) \times 1 + (5 - 5) \times 1 = 11$. [Klotz (1998), pp. 528-529].

- *L'impôt sur le revenu des personnes physiques est un impôt à taux progressif qui augmente par tranches. Supposons que, dans un pays fictif, le barème d'imposition pour une part soit le suivant :*

	Revenu (en u.m.)	Taux d'imposition
1 ^{ère} tranche	$0 \leq x < 50000$	0 %
2 ^{ème} tranche	$50000 \leq x < 80000$	10 %
3 ^{ème} tranche	$80000 \leq x < 100000$	20 %
4 ^{ème} tranche	$100000 \leq x < 120000$	35 %
5 ^{ème} tranche	$x \geq 120000$	50 %

Le taux d'imposition t est une fonction en escalier de revenu x . Cette fonction est discontinue aux points : $x = 50000, 80000, 100000$ et 120000 .

Un célibataire paiera :

- *pour un revenu imposable de 100000 u.m., un impôt de $(50000 \times 0) + (30000 \times 0,1) + (20000 \times 0,2) = 3000 + 4000 = 7000$ u.m.*

- *pour un revenu imposable de 130000 u.m., un impôt de $(50000 \times 0) + (30000 \times 0,1) + (20000 \times 0,2) + (20000 \times 0,35) + (10000 \times 0,5) = 3000 + 4000 + 7000 + 5000 = 19000$ u.m.*

L'impôt payé par un célibataire possédant un revenu imposable de 100000 u.m. est représenté par la surface limitée par le graphe de la fonction t , l'axe des réels, les droites $x = 0$ et $x = 100000$. (...)

Reprenons le problème de l'impôt sur le revenu évoqué au paragraphe A. Nous supposons maintenant que le taux d'imposition varie continuellement et nous notons $t(r)$ le taux d'imposition appliqué au $r^{\text{ème}}$ franc de revenu. Quel est le montant correspondant à un revenu imposable R ?

La fonction t étant continue, nous pouvons la supposer, en première approximation, constante lorsque r augmente d'une faible quantité dr . Pour la partie du revenu comprise entre r et $(r + dr)$, l'imposition est donc à peu près $t(r)dr$, quantité représentée par la surface du rectangle admettant pour base l'intervalle $[r, r + dr]$ et pour hauteur $t(r)$.

Pour calculer l'impôt correspondant au revenu R , nous allons partager l'intervalle $[0, R]$ à l'aide d'une subdivision $D = \{R_i\}$, la subdivision étant assez fine pour que le taux d'imposition puisse être supposé constant et égal à $t(R_i)$ sur l'intervalle $[R_i, R_{i+1}]$. Le montant d'imposition correspondant à cette tranche de revenu est : $t(R_i) \times (R_{i+1} - R_i) = t(R_i) dR_i$. Quand le nombre de points de la subdivision augmente, l'approximation s'améliore : l'impôt est la limite, lorsque n tend vers l'infini,

de la somme de Riemann $\sum_{i=0}^n t(R_i) dR_i$. Il est donc égal à $\int_0^R t(r) dr$. [Courtade-Coulomb (1991), pp. 339, 344-345].

- *La démarche de l'économiste emprunte couramment deux voies opposées et complémentaires. Constatant qu'une relation fonctionnelle unit deux phénomènes, prix et quantités vendues par exemple, il peut rechercher le taux de variation qui résultera, pour la fonction, d'une légère modification de la variable. Il lui arrive aussi, en sens inverse, partant du taux de variation connu, de tenter de déterminer son influence sur un phénomène global comme le volume de son profit total. Autrement dit, tantôt l'économiste part de la forme connue d'une fonction pour mesurer un taux de variation; tantôt il part d'un taux de variation pour déterminer la forme d'une fonction.*

Les taux dont il s'agit, concernant des modifications infinitésimales, ceci nous amène à préciser une nouvelle notion, celle d'infiniment petit. (...)

Les règles concernant les infiniment petits nous permettent de préciser les perspectives d'utilisation qui nous intéressent ici. (...)

La somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits peut tendre vers une quantité finie; ainsi la surface du triangle a, b, c définie par une fonction $y = a x$ limitée en a et b peut être considérée comme la somme de surfaces élémentaires, telles que "de f g" de base infiniment petite et existant en nombre infiniment grand; nous pouvons dire dès maintenant que cette (...) caractéristique ouvre la voie du calcul intégral. [Passet, tome III, pp. 3-4].

7.2 Développements théoriques

7.2.1 Intégrale définie

Un problème important de l'analyse mathématique consiste à calculer l'aire d'une région plane comprise entre les graphes de deux fonctions.

Le cas particulier où l'une des deux fonctions est étagée et non-négative tandis que l'autre est la constante nulle est immédiat : si un intervalle $[a, b]$, pour $a < b$, est partitionné en n sous-intervalles à l'aide des points de subdivision x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , avec $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, et si φ est une fonction étagée telle que $\varphi(x) = y_j$ pour tout réel x de $[x_j, x_{j+1}[$ et tout entier j compris entre 0 et $n - 1$, alors l'aire de la région plane comprise entre le graphe de φ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à

$$S(\varphi; a, b) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \times (x_{j+1} - x_j).$$

Lorsqu'une fonction f est positive ou nulle mais pas nécessairement étagée sur $[a, b]$, on peut approcher son graphe par celui d'une fonction étagée φ qui prend, par exemple, la valeur de l'extrémité gauche sur chaque sous-intervalle obtenu en partitionnant l'intervalle $[a, b]$ à l'aide des points $x_j = a + \frac{j}{n} \times (b - a)$ pour $j = 0, 1, \dots, n$. Dans ce cas, l'expression

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \times (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{j}{n} \times (b - a)\right) \times \frac{b - a}{n},$$

appelée *somme de Riemann*, donne une estimation de l'aire de la région comprise entre les abscisses a et b , ainsi qu'entre le graphe de f et l'axe horizontal. Il est clair que cette approximation sera d'autant meilleure que le nombre n de subdivisions augmente; c'est pourquoi, on va naturellement essayer de prendre un nombre infiniment grand de points de subdivision.

Indépendamment du problème géométrique du calcul d'une aire, on peut, pour tout entier naturel n et pour toute fonction f quel que soit son signe sur $[a, b]$, considérer la somme de Riemann

$$S(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{j}{n} \times (b - a)\right) \times \frac{b - a}{n}.$$

On introduit de la sorte la fonction $S : n \rightarrow S(n)$ définie sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels. La règle d'extension permet d'envisager, pour tout hypernaturel ω infiniment grand, l'hyversomme de Riemann correspondante, à savoir

$$S(\omega) = \sum_{j=0}^{\omega-1} f\left(a + \frac{j}{\omega} \times (b - a)\right) \times \frac{b - a}{\omega}.$$

Il s'agit, en principe, de la somme d'un nombre infiniment grand de nombres infiniment petits, c'est-à-dire d'un nombre hyperréel qui n'est pas forcément standard; il convient dès lors d'en prendre, si possible, la partie standard. Ces considérations conduisent à cette définition :

Définition 7.2.1 Soient a et b deux réels positifs, tels que $a < b$.

- Une fonction f est dite *intégrable* sur $[a, b]$ si, pour tout ω infiniment grand positif, l'hyversomme correspondante de Riemann

$$S(\omega) = \sum_{j=0}^{\omega-1} f\left(a + \frac{j}{\omega} \times (b - a)\right) \times \frac{b - a}{\omega}$$

est un hyperréel limité dont la partie standard ne dépend pas de ω .

- Dans ce cas, le nombre réel $\text{st}(S(\omega))$ est appelé l'intégrale définie, ou simplement l'intégrale, de f sur $[a, b]$.
- Elle se note $\int_a^b f(x) dx$ ou simplement $\int_a^b f$;
- la fonction f est baptisée intégrand, tandis que a et b sont les bornes d'intégration;
- si f est positive ou nulle sur $[a, b]$, $\int_a^b f$ est par définition (la mesure de) l'aire de la région plane délimitée par le graphe de f , l'axe des abscisses, les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
- On convient de plus que $\int_b^a f = -\int_a^b f$ et que lorsque $a = b$, $\int_a^a f = 0$.

En guise d'exemples simples, considérons, pour deux réels positifs r et h , l'aire du rectangle de sommets $(0, 0)$, $(r, 0)$, (r, h) et $(0, h)$, celle du triangle de sommets $(0, 0)$, $(r, 0)$ et (r, r) , ainsi que celle du triangle curviligne compris entre l'axe des abscisses, la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des ordonnées et la verticale d'équation $x = r$: elles sont respectivement données par $\int_0^r h$, $\int_0^r x$ et $\int_0^r x^2$.

Pour un hypernaturel ω infiniment grand, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^r h dx &= \text{st} \left(\sum_{j=0}^{\omega-1} h \times \frac{r}{\omega} \right) = \text{st} \left(\frac{h \times r}{\omega} \times \sum_{j=0}^{\omega-1} 1 \right) = \text{st} \left(\frac{h \times r}{\omega} \times \omega \right) \\ &= h \times r \text{ (? 7.1);} \\ \int_0^r x dx &= \text{st} \left(\sum_{j=0}^{\omega-1} \frac{r^2}{\omega^2} \times j \right) = \text{st} \left(\frac{r^2}{\omega^2} \times \sum_{j=0}^{\omega-1} j \right) = \text{st} \left(\frac{r^2}{\omega^2} \times \frac{\omega(\omega-1)}{2} \right) \\ &= \frac{r^2}{2} \text{ (? 7.2a);} \\ \int_0^r x^2 dx &= \text{st} \left(\sum_{j=0}^{\omega-1} \frac{r^3}{\omega^3} \times j^2 \right) = \text{st} \left(\frac{r^3}{\omega^3} \times \sum_{j=0}^{\omega-1} j^2 \right) = \text{st} \left(\frac{r^3}{\omega^3} \times \frac{\omega(\omega-1)(2\omega-1)}{6} \right) \\ &= \frac{r^3}{3} \text{ (? 7.2b).} \end{aligned}$$

En général, les hypersommes de Riemann ne se manipulent pas aussi facilement que ne le supposent ces trois exemples élémentaires; l'existence de l'intégrale définie de f sur $[a, b]$ exige que toute hypersomme de Riemann pour ce problème reste limitée, tandis que son unicité n'est garantie que lorsque la partie standard de ces hypersommes ne dépend pas de l'hypernaturel infiniment grand ω considéré. Heureusement, on peut démontrer que la plupart des fonctions exploitées dans la pratique sont intégrables :

Théorème 7.2.2 (Intégrabilité des fonctions continues.) *Toute fonction f continue sur un intervalle compact $I = [a, b]$ est intégrable sur I et l'on a, quel que soit le nombre infiniment grand positif ω :*

$$\int_a^b f = st \left(\sum_{j=0}^{\omega-1} f \left(a + \frac{j}{\omega} \times (b-a) \right) \times \frac{b-a}{\omega} \right).$$

Preuve. Le théorème de Weierstrass garantit l'existence de deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de I . Dès lors, toute somme de Riemann $S(n)$ est limitée puisque comprise entre $m \times (b-a)$ et $M \times (b-a)$ (? 7.3). La règle de transfert assure le caractère limité des hypersommes $S(\omega)$ pour tout hypernaturel ω infiniment grand.

Pour deux hypernaturels infiniment grands ω et ω' quelconques, comparons les hypersommes correspondantes de Riemann

$$S(\omega) = \sum_{j=0}^{\omega-1} f \left(a + \frac{j}{\omega} \times (b-a) \right) \times \frac{b-a}{\omega}$$

et

$$S(\omega') = \sum_{j=0}^{\omega'-1} f \left(a + \frac{j}{\omega'} \times (b-a) \right) \times \frac{b-a}{\omega'}.$$

A cet effet, construisons la réunion des points de subdivision des deux partitions correspondantes à ces deux hypersommes; nous obtenons de la sorte, pour un hypernaturel ω infiniment grand, des hyperréels *z_k tels que

$${}^*z_0 = a < {}^*z_1 < {}^*z_2 < \dots < {}^*z_{\omega''-1} < {}^*z_{\omega''} = b.$$

Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, \omega''$, il existe un nombre *u_k de la forme $a + \frac{i}{\omega} \times (b-a)$ avec

$$a + \frac{i}{\omega} \times (b-a) \leq {}^*z_k < a + \frac{i+1}{\omega} \times (b-a)$$

et un nombre *v_k de la forme $a + \frac{j}{\omega'} \times (b-a)$ avec

$$a + \frac{j}{\omega'} \times (b-a) \leq {}^*z_k < a + \frac{j+1}{\omega'} \times (b-a),$$

ces nombres étant tels que

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{\omega''-1} f({}^*u_k) \times ({}^*z_{k+1} - {}^*z_k)$$

et

$$S(\omega') = \sum_{k=0}^{\omega''-1} f({}^*v_k) \times ({}^*z_{k+1} - {}^*z_k) \quad (? 7.4).$$

Comme $*u_k \cong *v_k$, on a $f(*u_k) \cong f(*v_k)$ (? 7.5) et il existe un nombre infiniment petit ou nul ε_k tel que $f(*u_k) = f(*v_k) + \varepsilon_k$, $\forall k = 1, \dots, \omega^n$. On a dès lors

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{\omega^n-1} [f(*v_k) + \varepsilon_k] \times (*z_{k+1} - *z_k) = S(\omega') + \sum_{k=0}^{\omega^n-1} \varepsilon_k \times (*z_{k+1} - *z_k) \quad (? 7.6).$$

En désignant par ν et μ respectivement le plus petit et le plus grand des nombres ε_k (? 7.7), on voit que l'hypperréel

$$\sum_{k=0}^{\omega^n-1} \varepsilon_k \times (*z_{k+1} - *z_k)$$

est infiniment petit puisqu'il est compris entre $\nu \times (b - a)$ et $\mu \times (b - a)$ (? 7.8). En conséquence, $S(\omega)$ et $S(\omega')$ possèdent la même partie standard . ■

Il convient de remarquer que le raisonnement ci-dessus reste valable quand les points de subdivision des partitions hyperfinies de $[a, b]$ ne sont pas forcément équidistants. De même, on peut remplacer la valeur de f en l'extrémité gauche de chaque sous-intervalle de la partition par la valeur prise par f en un point arbitraire de l'intervalle (? 7.9). C'est pourquoi, le calcul de $\int_a^b f$ se fait quelquefois, sous réserve d'existence, en choisissant des points x_j de $[a, b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, ainsi qu'un point c_j arbitrairement dans $[x_j, x_{j+1}]$, puis en calculant la limite, lorsque n tend vers l'infini et $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ tend vers 0, de la somme de Riemann $\sum_{j=0}^{n-1} f(c_j) \times \Delta x_j$. En particulier, on peut choisir pour point c_j un point qui assure le minimum m_j ou le maximum M_j de f sur $[x_j, x_{j+1}]$; on écrit alors symboliquement

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \Delta x_j \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^{n-1} m_j \times \Delta x_j = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \Delta x_j \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \Delta x_j.$$

Ce qui précède n'est valable que sous l'hypothèse de continuité de f sur $[a, b]$. Par exemple, pour la fonction d de Dirichlet sur $[0, 1]$, on a, pour tout naturel n et pour toute partition finie de cet intervalle au moyen de points x_j , $\sum_{j=0}^{n-1} m_j \times \Delta x_j = 0$ mais $\sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \Delta x_j = 1$ (? 7.10); la fonction de Dirichlet n'est donc pas intégrable sur $[0, 1]$ (ni sur aucun intervalle compact).

Dans un premier temps, nous allons dès lors étudier les propriétés des intégrales définies uniquement pour des fonctions continues sur des intervalles compacts non vides et non réduits à un point. Il est possible de généraliser cette théorie en introduisant des "intégrales généralisées".

Théorème 7.2.3 (Linéarité des intégrales.) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$, avec $a < b$, r et s deux réels. La fonction $r f + s g$ est intégrable sur I et l'on a : $\int_a^b (r f + s g) = r \int_a^b f + s \int_a^b g$.*

Preuve. L'intégrabilité de $rf + sg$ résulte de sa continuité (? 7.11). Pour un entier naturel n quelconque, la somme de Riemann

$$S(n) = \sum_{j=0}^{n-1} (rf + sg) \left(a + \frac{j}{n} \times (b - a) \right) \times \frac{b - a}{n}$$

peut s'écrire sous la forme

$$S(n) = r \sum_{j=0}^{n-1} f \left(a + \frac{j}{n} \times (b - a) \right) \times \frac{b - a}{n} + s \sum_{j=0}^{n-1} g \left(a + \frac{j}{n} \times (b - a) \right) \times \frac{b - a}{n},$$

soit la combinaison linéaire correspondante des sommes de Riemann relatives à f et à g . La conclusion s'obtient en appliquant la règle de transfert, puis en prenant la partie standard des deux membres de l'égalité obtenue (? 7.12). ■

Théorème 7.2.4 (Conservation des inégalités par intégration.) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$, avec $a < b$. Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de I , alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$ et le réel $\int_a^b (f - g)$ donne l'aire de la région plane comprise entre les graphes des deux fonctions et les abscisses a et b .*

Preuve. Les sommes de Riemann $S(n)$ et $S'(n)$ relatives à f et à g respectivement sont telles que $S(n) \geq S'(n)$ (? 7.13); l'inégalité entre les deux intégrales s'obtient de nouveau en appliquant la règle de transfert et en prenant la partie standard des deux membres(? 7.14).

Pour démontrer la propriété relative à l'aire du domaine D considéré, il suffit de remarquer que l'aire d'une région est invariante par translation; en conséquence, si r désigne un réel tel que $f(x) + r \geq 0$ et $g(x) + r \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$ (? 7.15), l'aire de D vaut visiblement $\int_a^b [f(x) + r] dx - \int_a^b [g(x) + r] dx$, d'où la conclusion par la linéarité des intégrales (? 7.16). ■

Théorème 7.2.5 (Fractionnement de l'intervalle d'intégration.) *Pour une fonction f continue sur $[a, b]$ et un réel c compris dans $]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

Preuve. Pour tout naturel n , construisons les points suivants : $x_j = a + j \times \frac{c-a}{n}$ pour $j = 0, 1, \dots, n$ et $x_j = c + (j - n) \times \frac{b-c}{n}$ pour $j = n, n + 1, \dots, 2n$; on a

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = c < x_{n+1} < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

La somme de Riemann $S(n) = \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) \times (x_{j+1} - x_j)$ peut se découper comme suit :

$$S(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \times (x_{j+1} - x_j) + \sum_{j=n}^{2n-1} f(x_j) \times (x_{j+1} - x_j),$$

ces deux derniers termes étant les sommes de Riemann de f sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ respectivement. La conclusion s'obtient de la manière habituelle (? 7.17). ■

Il découle des conventions admises pour une intégrale dont les bornes ne sont pas dans l'ordre naturel, que la formule $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ est valable quelle que soit la position de c par rapport à a et b , pour autant que la fonction reste continue sur chaque intervalle considéré; par exemple, si $c > b$, l'énoncé ci-dessus livre : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$; comme $\int_c^b f = -\int_b^c f$, on obtient $\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f$, d'où l'égalité annoncée.

Théorème 7.2.6 (Théorème de la moyenne.) *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f(c)$ coïncide avec la valeur moyenne de f sur $[a, b]$, c'est-à-dire avec le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f$.*

Preuve. Si m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$ (? 7.18), on sait déjà que

$$m \times (b - a) \leq \int_a^b f \leq M \times (b - a) \quad (? 7.19).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure (? 7.20). ■

Remarques. 1. La valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est, par définition, le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f$. Il s'agit là d'une extension naturelle de la notion de moyenne arithmétique. De fait, pour une fonction étagée qui prendrait n valeurs y_j sur n intervalles de même longueur, on adopterait naturellement comme valeur moyenne la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^n y_j$; si les n valeurs y_j sont prises sur n intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ de longueurs variées $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$ avec $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, il est normal de pondérer les valeurs y_j par les longueurs Δx_j des intervalles correspondants et d'adopter comme valeur moyenne le nombre $\frac{1}{b-a} \times \sum_{j=1}^n (y_j \times \Delta x_j)$. Enfin, pour une fonction quelconque, l'approximation par des fonctions étagées conduit à remplacer dans cette dernière expression la somme finie par l'intégrale $\int_a^b f$.

2. Si f est positive ou nulle sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f$ représente l'aire délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses, entre les abscisses a et b . Il découle de la proposition précédente que c'est aussi l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[a, b]$ et de hauteur $\mu = f(c)$. Ainsi, il existe un point c , compris entre a et b , tel que l'on ne modifie pas l'aire considérée si on remplace le graphe de f par celui d'une fonction constante de valeur $f(c)$.

7.2.2 Liens entre dérivées et intégrales

Les deux notions les plus importantes de l'analyse mathématique sont celles de dérivée et d'intégrale définie: elles s'interprètent souvent comme étant une "valeur marginale" et une "aire" respectivement. Il serait évidemment intéressant de les relier entre elles,

notamment en regardant si l'intégrale ne définit pas une fonction dérivable lorsque la borne supérieure d'intégration varie.

De façon plus précise, considérons une fonction f continue, donc intégrable, sur un intervalle compact $[a, b]$. A tout réel $x \in]a, b[$, on peut associer le nombre $F(x) = \int_a^x f$: lorsque $f(x) \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$, $F(x)$ représente l'aire de la région plane limitée par les abscisses a et x , le graphe de f et l'axe des abscisses.

On définit de la sorte la fonction $F : x \in [a, b] \mapsto F(x)$. Nous allons démontrer que non seulement F est dérivable, mais que le nombre dérivé $F'(x)$ coïncide toujours avec $f(x)$. On est ainsi amené à introduire ce nouveau concept :

Définition 7.2.7 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Une fonction F dérivable et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $]a, b[$ est appelée une primitive de f sur $]a, b[$.*

Théorème 7.2.8 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f$ pour tout x dans $]a, b[$ est dérivable et est une primitive de f sur $]a, b[$.*

Preuve. Pour un réel x de $]a, b[$ et un hyperréel ε infiniment petit, on a

$$\int_a^{x+\varepsilon} f = \int_a^x f + \int_x^{x+\varepsilon} f. \quad (? 7.21)$$

On en déduit

$$F(x + \varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f. \quad (? 7.22)$$

Or, on peut trouver un hyperréel $*c$ compris entre $x + \varepsilon$ et x (? 7.23) tel que

$$\int_x^{x+\varepsilon} f = \varepsilon \times f(*c).$$

Dès lors, l'égalité

$$\frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} = f(*c)$$

conduit à la conclusion, puisque (? 7.24)

$$\text{st}(f(*c)) = f(x). \blacksquare$$

Remarque. Cet énoncé montre que la primitivation est, en quelque sorte, l'opération "inverse" de la dérivation. C'est d'ailleurs pour cela qu'une primitive est encore appelée une *antidérivée*.

Le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que toute fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ admet au moins une primitive, à savoir la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f$. Il en résulte que f possède alors une infinité de primitives, à savoir toutes les fonctions construites en ajoutant une constante à F . Ceci nous conduit à cette nouvelle définition :

Définition 7.2.9 Soit f une fonction qui est définie et possède une primitive sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$. La famille de toutes les primitives de f sur I est appelée l'intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(x) dx$ ou plus simplement $\int f$.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on peut donc écrire :

$$\int f(x) dx = \int_a^x f + C$$

puisque deux primitives d'une même fonction ne peuvent différer que d'une constante (? 7.25). Il est alors aisé de calculer la valeur d'une intégrale définie lorsqu'est connue une primitive de l'intégrand, on dispose en effet de cette règle :

Théorème 7.2.10 (Formule de Newton - Leibniz) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si F est une primitive de f sur $]a, b[$, alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Preuve. Il existe une constante C telle que $F(x) = \int_a^x f + C$ pour tout x de $]a, b[$ (? 7.26). Or, $\int_a^a f = 0$, d'où $F(a) = C$ et la conclusion (? 7.27). ■

7.2.3 Règles de primitivation

Soit g une primitive de f . Par différentiation, on a

$$dg = dF = F'(x) dx = f(x) dx,$$

dès lors il existe une constante C telle que

$$\int dg = g + C \quad \text{et} \quad d\left(\int g\right) = g.$$

Les symboles d de différentiation et \int d'intégration apparaissent bien comme étant "inverses" l'un de l'autre. La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet ainsi de dresser un formulaire de primitives immédiates :

- $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, m étant une constante différente de -1
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg}x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C.$

Par ailleurs, les différentes règles de dérivation vues précédemment peuvent dès lors être inversées pour donner des lois correspondantes de primitivation.

Théorème 7.2.11 (Primitivation par décomposition linéaire) *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, et r, s deux réels quelconques. La combinaison linéaire $rf + sg$ admet une intégrale définie sur $]a, b[$ et l'on a*

$$\int (rf(x) + sg(x))dx = r \int f(x)dx + s \int g(x)dx.$$

Preuve. Il suffit de se rappeler que la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées. ■

Théorème 7.2.12 (Primitivation par parties) *Si f et g sont aimables sur $[a, b]$, alors*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Preuve. Cela découle directement de la formule donnant la dérivée d'un produit de deux fonctions (? 7.28). ■

Théorème 7.2.13 (Primitivation par substitution) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si l'on pose $x = g(t)$, où g admet une réciproque et une dérivée continue, alors*

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)]g'(t) dt.$$

Preuve. On démontre cette formule en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées (? 7.29). ■

Exemples.

- $$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2 dx}{x} &= \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx \\ &= \int dx - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{x} \\ &= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C. \end{aligned}$$
- $$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg}x - x + C.$$

- La connaissance d'une primitive F de f entraîne celle de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$, où a et b désignent deux constantes, avec a non nulle. De fait la substitution $ax + b = t$, pour laquelle $a dx = dt$, implique

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Par exemple,

$$\int \sin 2x dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(3x + 1)^2} = \frac{-1}{3(3x + 1)} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1 - x} = -\ln |1 - x| + C.$$

- Par ailleurs, une expression du type

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

se ramène à

$$\frac{1}{\beta^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2 + 1},$$

puis à

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

par la substitution $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$; $F(x)$ vaut donc $\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C$.

- Au contraire,

$$\int \frac{(x - \alpha) dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

fait apparaître au numérateur de l'intégrand la moitié de la différentielle du dénominateur; la substitution $(x - \alpha)^2 + \beta^2 = t$ transforme cette intégrale indéfinie en

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + C.$$

Plus généralement, une primitive du type

$$\int \frac{(Mx + N) dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

s'obtient en combinant les deux précédentes puisqu'il suffit de transformer le numérateur en $(x - \alpha) + N + M\alpha$.

Ces exemples suggèrent la possibilité de primitiver n'importe quelle fraction rationnelle (? 7.30).

- La primitive $\int xe^x dx$ se calcule par parties en posant $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$: on peut alors écrire : $f'(x) = 1$ et $g(x) = \int e^x dx = e^x$, d'où l'on déduit

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

De même, la primitive $\int \ln x dx$ peut être obtenue par parties en posant $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$, ce qui donne $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$. On calculerait par une méthode identique $\int x \sin x dx$, $\int x \cos x dx$, $\int \arcsin x dx$ et $\int \operatorname{arctg} x dx$.