Exercices de mécanique 4

Torseur, gradient, divergent, rotationel, barycentre

Exercice 1

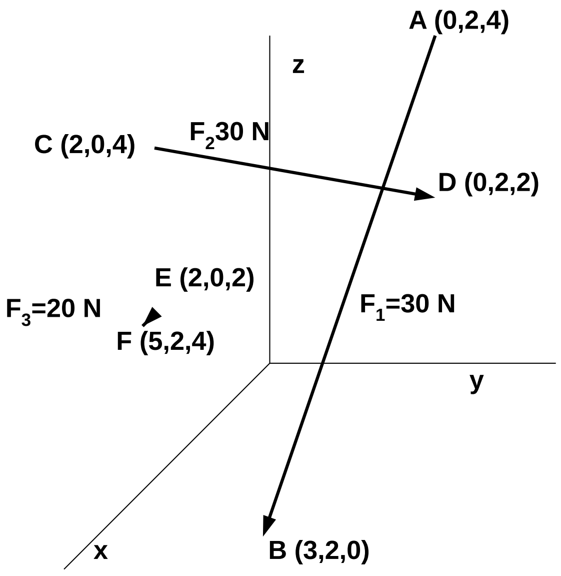
On donne 3 forces

$\vec{F}_1; \vec{F}_2, \vec{F}_3 \;\; F_1 = 30N, F_2 = 40N, F_3 = 20N \;\;\; \vec{F}_1 = F_1\, \overrightarrow{1_{AB}};\; \vec{F}_2 = F_2\, \overrightarrow{1_{CD}},\; \vec{F}_3 = F_3\, \overrightarrow{1_{EF}}$

$A:(0,2,4)\;\; B:(3,2,0)\;\; C:(0,2,2)\;\; E:(2,0,2)\;\; F:(5,2,4)$

On demande la résultante du système (Torseur) : $\vec{R}$ et $\vec{C}$

Solution



Calculons les vecteurs

$$A(0,2,4)\;\; B(3,2,0)\;\; \overrightarrow{AB}(3,0,-4) \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 5 \qquad \overrightarrow{1_{AB}}\left(\tfrac{3}{5}, 0, -\tfrac{4}{5}\right)$$

$$C(2,0,4)\;\; D(0,2,2)\;\; \overrightarrow{CD}(-2,2,-2)\;\; \left|\overrightarrow{CD}\right| = 2\sqrt{3}\;\; \overrightarrow{1_{CD}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$E(2,0,2)\;\; F(5,2,4)\;\; \overrightarrow{FE}(3,2,2) \qquad \left|\overrightarrow{FE}\right| = \sqrt{17} \quad \overrightarrow{1_{CD}}\left(\tfrac{3}{\sqrt{17}}, \tfrac{2}{\sqrt{17}}, \tfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$$

Calculons les composantes des forces.

	$\vec{1}_x$	$\vec{1}_y$	$\vec{1}_z$
F_1	$30\,\dfrac{3}{5}=18$	0	$-30\,\dfrac{4}{5}=-24$
F_2	$-\dfrac{40}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{40}{\sqrt{3}}$	$-\dfrac{40}{\sqrt{3}}$
F_3	$\dfrac{60}{\sqrt{17}}$	$\dfrac{40}{\sqrt{17}}$	$\dfrac{40}{\sqrt{17}}$
$\sum F_i$	$9,46$	$32,80$	$-37,39$

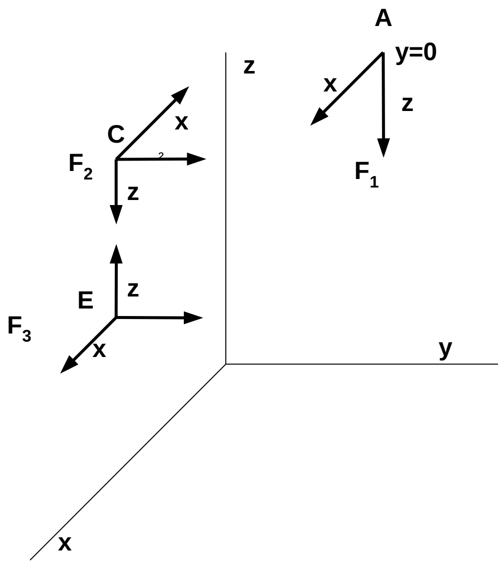
$$\rightarrow\ \vec{R}=\sum\vec{F}_i=9,46\,\vec{1}_x+32,80\,\vec{1}_y-37.39\,\vec{1}_z$$

$$\rightarrow\ \left|\vec{R}\right|=50.63\ N$$

Calculons les moments :
On peut se lancer dans les grands calculs du style

$$\sum\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_i\right)=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}_1+\overrightarrow{OC}\times\vec{F}_2+\overrightarrow{OE}\times\vec{F}_3$$

ce qui implique le calcul d'une série de produits vectoriels. En fait, il est plus facile et rapide de faire le raisonnement suivant :



Calcul de la composante M_x de $\vec{C}$:

Faisons le raisonnement détaillé pour cette composante. Ensuite, on peut accélérer les calculs en travaillant avec des tableaux.

Soit $\vec{F}_1$:
La composante x est parallèle à l'axe des x. Les vecteurs sont parallèles. Le moment est nul.
La composante y est nulle. Le moment est nulle.

La composante z coupe l'axe des y en y $=2$. (Ne pas oublier qu'une force est un vecteur glissant). Le moment est donc $2\times(-24)=-48\ Nm$ (Signe moins car sens horlogique).

Soit $\overrightarrow{F_2}$:
La composante x est parallèle à l'axe des x. Les vecteurs sont parallèles. Le moment est nul.
La composante y est appliqué en C qui se trouve à une distance 4 l'axe des x. Le moment est donc : $-4\dfrac{40}{\sqrt{3}}=-92.3760\ Nm$ (Signe moins car sens horlogique)
La composante z coupe l'axe des x . le moment est donc nul. (Vecteurs sécants)

Soit $\overrightarrow{F_3}$:
La composante x est parallèle à l'axe des x. Les vecteurs sont parallèles. Le moment est nul.
La composante y est appliqué en E qui se trouve à une distance 2 l'axe des x. Le moment est donc : $-2\dfrac{40}{\sqrt{17}}=-19.4029\ Nm$ (Signe moins car sens horlogique)
La composante z coupe l'axe des x . le moment est donc nul. (Vecteurs sécants)

Le moment total est donc : $M_x=-48-92.3760-19.4029=-159.7789\ Nm$

Calcul de la composante M_y de $\vec{C}$:

Travaillons avec un tableau pour simplifier le calcul.

$\overrightarrow{F_i}$	composante	distance	force	moment	commentaire
$\overrightarrow{F_1}$	x	4	18	72	
	z			0	Vecteurs sécants
$\overrightarrow{F_2}$	x	4	$-\dfrac{40}{\sqrt{3}}$	-92.3760	
	z	2	$\dfrac{40}{\sqrt{3}}$	46.1880	
$\overrightarrow{F_3}$	x	2	$\dfrac{60}{\sqrt{17}}$	29.1043	
	z	2	$-\dfrac{40}{\sqrt{17}}$	-19.4029	
$\sum$				35.8134	

Conclusion : $M_y=35.8134\ Nm$

On aura noté que l'on ne s'occupe pas des composantes y (vecteurs parallèles)

Calcul de la composante M_z de $\vec{C}$:

$\vec{F_i}$	composante	distance	force	moment	commentaire
$\vec{F_1}$	x	2	-18	-36	
	y			0	Vecteur nul
$\vec{F_2}$	x			0	Vecteurs sécants
	y	2	$\frac{40}{\sqrt{3}}$	46.1880	
$\vec{F_3}$	x			0	Vecteurs sécants
	y	2	$\frac{40}{\sqrt{17}}$	19.4029	
$\sum$				29.5909	

Conclusion : $M_z = 29.5909\ Nm$

On aura noté que l'on ne s'occupe pas de la composante z

Finalement $\vec{C} = -159.7789\,\vec{1_x} + 35.8134\,\vec{1_y} + 29.5909\,\vec{1_z} \quad \rightarrow \quad |\vec{C}| = 166.40\,Nm$

Note : Avec un peu d'habitude, cette méthode est de loin la plus simple et la plus rapide. Un peu d'entraînement et il est possible de se passer même des tableaux.

Calcul des angles directeurs.

De la résultante

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{|\vec{R}|} = \frac{\sum \vec{F}_x}{|\vec{R}|} = \frac{9.46}{50.63} = 0.1857$$

$$\cos\theta_y = \frac{R_y}{|\vec{R}|} = \frac{\sum \vec{F}_y}{|\vec{R}|} = \frac{32.80}{50.63} = 0.6478$$

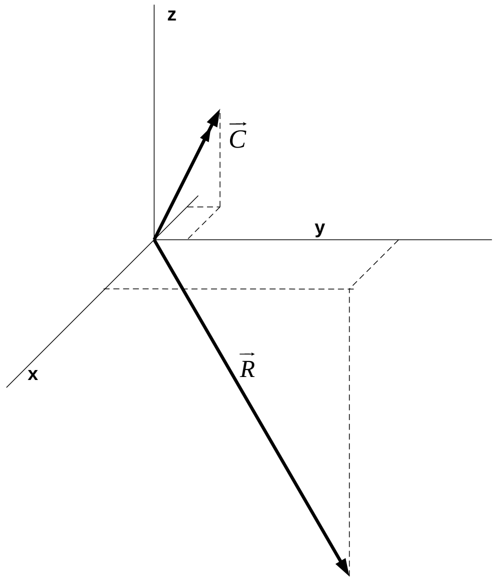
$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{|\vec{R}|} = \frac{\sum \vec{F}_z}{|\vec{R}|} = \frac{37.39}{50.63} = 0.7385$$

Du moment

$$\cos\phi_x = \frac{C_x}{|\vec{C}|} = \frac{\sum \vec{M}_x}{|\vec{M}|} = \frac{-159.78}{166.40} = -0.9602$$

$$\cos\phi_y = \frac{C_y}{|\vec{C}|} = \frac{\sum \vec{M}_y}{|\vec{M}|} = \frac{35.81}{166.40} = 0.2152$$

$$\cos\phi_z = \frac{C_z}{|\vec{C}|} = \frac{\sum \vec{M}_z}{|\vec{M}|} = \frac{29.59}{166.40} = 0.1778$$


z
$\vec{C}$
y
x
$\vec{R}$

Exercice 2

Soit une trajectoire C référée par $\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{1_x} + 3\sin 2t\,\vec{1_y} + (8t-4)\vec{1_z}$

Donner un vecteur unitaire à la courbe.

Trouver la courbure, le rayon de courbure.

Donne le vecteur unitaire $\vec{1_n}$.

Calculer la torsion.

Solution

PREMIERE METHODE (pour la courbure et la torsion)

$$\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{1_x} + 3\sin 2t\,\vec{1_y} + (8y-4)\vec{1_z}$$

$$\vec{r}\,' = -6\sin 2t\,\vec{1_x} + 6\cos 2t\,\vec{1_y} + 8\vec{1_z} \;\rightarrow\; \left|\vec{r}\,'\right| = \sqrt{36+64} = 10$$

$$\vec{r}\,'' = -12\cos 2t\,\vec{1_x} - 12\sin 2t\,\vec{1_y}$$

$$\vec{r}\,''' = 24\sin 2t\,\vec{1_x} - 24\cos 2t\,\vec{1_y}$$

$$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ -6\sin 2t & 6\cos 2t & 8 \\ -12\cos 2t & -12\sin 2t & \end{vmatrix} = 96\sin 2t\,\vec{1_x} - 96\sin 2t\,\vec{1_y} + 72\,\vec{1_z}$$

$$\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right| = \sqrt{96^2\sin^2 2t + 96^2\cos^2 2t + 72^2} = \sqrt{96^2+72^2} = 120$$

$$\text{Rayon de courbure}: \frac{\left|\vec{r}\,'\right|^3}{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|} = \frac{10^3}{120} = \frac{25}{3}$$

$$\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\vec{r}\,''' = 24\times 96 = 2304$$

$$\text{Rayon de torsion}: \frac{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|^2}{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\vec{r}\,'''} = \frac{120^2}{2304} = 6,25$$

DEUXIEME METHODE

$$\vec{1}_t = \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = -0,6\sin 2t\,\vec{1}_x + 0,6\cos 2t\,\vec{1}_y + 0,8\,\vec{1}_z$$

$$\frac{d\vec{1}_t}{ds} = \frac{d\vec{1}_t/dt}{ds/dt} \quad \text{or} \quad ds/dt = \left|\vec{r}\,'\right| = 10$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{1}_t}{ds} = \frac{-1,2\sin 2t\,\vec{1}_x + 1,2\cos 2t\,\vec{1}_y}{10} = -\frac{3}{25}\cos 2t\,\vec{1}_x - \frac{3}{25}\sin 2t\,\vec{1}_y$$

$$\rightarrow \left|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right| = \frac{3}{25} \quad \rightarrow \quad \text{Rayon de courbure : } \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right| \rightarrow \rho = \frac{25}{3}$$

$$\vec{1}_n = \frac{\vec{r}\,''}{\left|\vec{r}\,''\right|} = -\cos 2t\,\vec{1}_x - \sin 2t\,\vec{1}_y$$

$$\vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ -0,6\sin 2t & 0,6\cos 2t & 0,8 \\ -\cos 2t & -\sin 2t & 0 \end{vmatrix} = 0,8\sin 2t\,\vec{1}_x - 0,8\cos 2t\,\vec{1}_y + 0,6\,\vec{1}_z$$

$$\frac{d\vec{1}_b}{ds} = \frac{d\vec{1}_b/dt}{ds/dt} \quad \text{or} \quad ds/dt = \left|\vec{r}\,'\right| = 10$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{1}_b}{ds} = \frac{1,6\cos 2t\,\vec{1}_x + 1,6\sin 2t\,\vec{1}_y}{10}$$

$$\rightarrow \left|\frac{d\vec{1}_b}{ds}\right| = \frac{1,6}{10} \quad \rightarrow \quad \text{Rayon de torsion : } \frac{1}{\tau} = \left|\frac{d\vec{1}_b}{ds}\right| \rightarrow \tau = 6,25$$

Exercice 3

On donne $\phi = x^2 yz^3$ et $\vec{A} = xz\,\vec{1_x} - y^2\,\vec{1_y} + 2x^2 y\,\vec{1_z}$

Trouver : $\vec{\nabla}\phi,\quad \vec{\nabla}.\vec{A},\quad \vec{\nabla}\times\vec{A},\quad div\left(\phi.\vec{A}\right)$

Solution

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \vec{\nabla}.\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{1_x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{1_y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{1_z} = 2xyz^3\,\vec{1_x} + x^2z^3\,\vec{1_y} + x^2yz^2\,\vec{1_z}$$

Divergence

$$\text{div}\,\phi = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\right) = z - 2y$$

Rotationel

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} = 2x^2\,\vec{1_x} + (4xy - x)\vec{1_y}$$

Divergence

$$\text{div}\left(\phi.\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(\phi.\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(x^3yz^4\,\vec{1_x} - x^2y^3z^3\,\vec{1_y} + 2x^4y^2z^3\,\vec{1_z}\right)$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4yz^2 = 3x^2yz^2\left(z^2 - yz + 2x^2\right)$$

Rotationel

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\phi\vec{A}\right) = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^3z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2\right)\vec{1_x} - \left(8x^3yz^3 - 4x^3yz^3\right)\vec{1_y} - \left(2xy^3z^3 + x^3z^4\right)\vec{1_z}$$

Exercice 4

$\vec{A} = \left(2xy + z^3\right)\vec{1_x} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{1_y} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{1_z}$

Montrer que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$.

Trouver une fonction scalaire ϕ telle que $\vec{\nabla}.\phi = \vec{A}$

Solution

On calcule

$$\begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 3xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \left(0 - 0\right)\vec{1_x} - \left(3z^2 - 3z^2\right)\vec{1_y} + \left(2x - 2x\right)\vec{1_z} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + 2y \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 3xz^2 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi = x^2 y + xz^3 + F_1(y,z) & (1) \\ \phi = x^2 y + y^2 + F_2(x,z) & (2) \\ \phi = xz^3 - 2z + F_3(x,y) & (3) \end{cases}$$

Notes : (1) $F_1(y,z)$ est indépendant de x. Sa dérivée par rapport à x est nulle

(2) $F_2(x,z)$ est indépendant de y. Sa dérivée par rapport à y est nulle

(3) $F_3(x,y)$ est indépendant de z. Sa dérivée par rapport à z est nulle

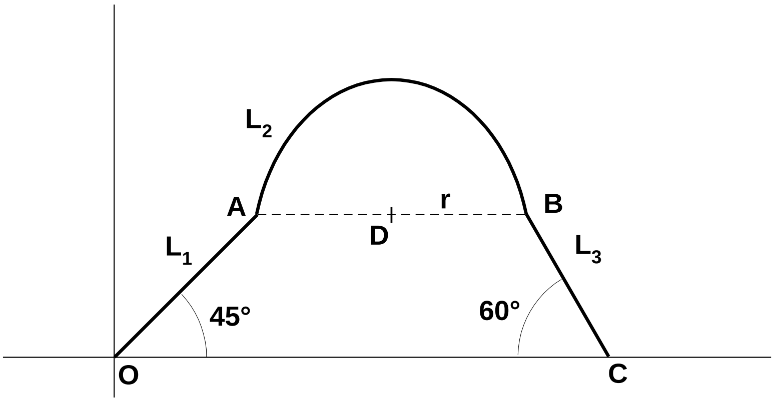
On résoud le système par rapport à $F_1(y,z)$, $F_2(x,z)$ et $F_3(x,y)$.

$$\rightarrow \begin{cases} F_1(y,z) = y^2 - 2z \\ F_2(x,z) = xz^3 - 2z \\ F_3(x,y) = x^2 y + y^2 \end{cases} \rightarrow \phi = x^2 y + xz^3 + y^2 - 2z + Cste$$

Exercice 5

Trouver le barycentre de dispositif constitué

1) d'une barre de 3 m faisant un angle de 45° avec l'horizontale suivie
2) d'un ½ cercle (barre) de 4 m de diamètre (diamètre horizontal) suivi
3) d'une barre qui fait un angle de 60° avec l'horizontale.



Solution

Soit L_1 la première barre, L_2 la pièce circulaire et L_3 la deuxième barre.

Longueur de L_3 : $y_A = L_1 \sin 45 = y_B = L_3 \sin 60 \;\; \rightarrow \;\; L_3 = \dfrac{L_1 \sin 45}{\sin 60} = 2,4455\, m$

Longueur de L_2 : $L_2 = \pi r = \pi\, 2 = 6,28\, m$

L_i		$\overline{x_i}$	$\overline{x_i}\, L_i$	$\overline{y_i}$	$\overline{y_i}\, L_i$
L_1	$3\, m$	$\frac{3}{2}\cos 45 = 1,06$	3,18	$\frac{3}{2}\sin 45 = 1,06$	3,18
L_2	$6,28\, m$	$3\cos 45 + 2 = 4,12$	25,87	$3\sin 45 + \frac{2r}{\pi} = 3,39$	21,29
L_3	$2,45\, m$	$3\cos 45 + 4 + \frac{2,45}{2}\cos 60 = 6,73$	16,49	$\frac{2,45}{2}\sin 60 = 1,06$	2,60
$\sum$	$11,73\, m$		45,54		27,07

Notes :

Expliquons le calcul pour L_2
On sait par symétrie que $\overline{x_2}$ à la même abscisse que le point D. C'est donc la projection de L_3 + le rayon.
Pour obtenir $\overline{y_2}$, il faut additionner l'ordonnée de D, et la distance du centre de masse de L_3. Voir annexe : Théorèmes de Guldin.

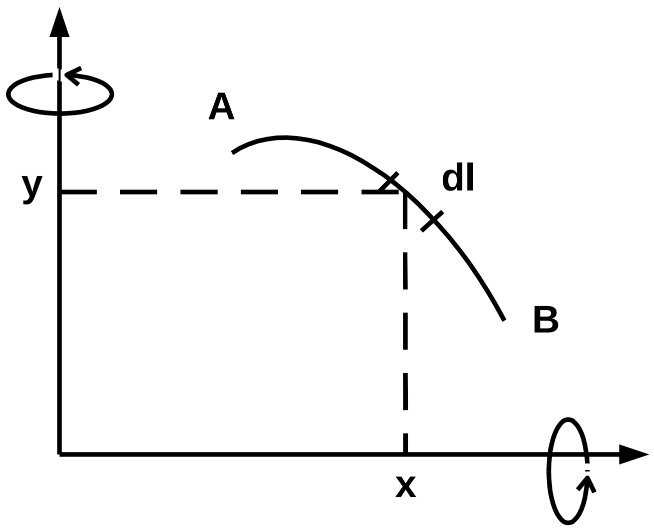
Les coordonnées du barycentre est donc :

$$\overline{x_G} = \frac{\sum L_i \, \overline{x_i}}{\sum L_i} = \frac{45.54}{11.73} = 3.88\,m$$

$$\overline{y_G} = \frac{\sum L_i \, \overline{y_i}}{\sum L_i} = \frac{27.07}{11.73} = 2.31\,m$$

Annexe : Théorèmes de Guldin

Premier théorème de Guldin



*L'**aire** de la surface latérale d'**un solide de révolution** est égale au produit de la longueur de la génératrice d'un côté de l'axe de rotation par la longueur de la trajectoire décrite par le centre de gravité de la courbe génératrice pour une révolution complète.*

Ce théorème permet de déterminer les coordonnées du barycentre.

$$\boxed{x_c = \frac{S_y}{2\pi l}} \qquad \boxed{y_c = \frac{S_x}{2\pi l}}$$

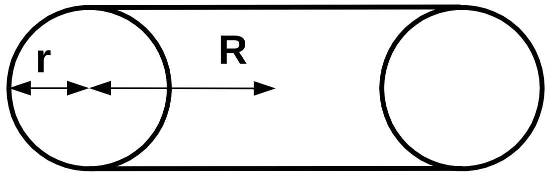
l Longueur de l'arc AB

S_y Surface obtenue en faisant tourner l'arc plan AB autour de l'axe y

S_x Surface obtenue en faisant tourner l'arc plan AB autour de l'axe x

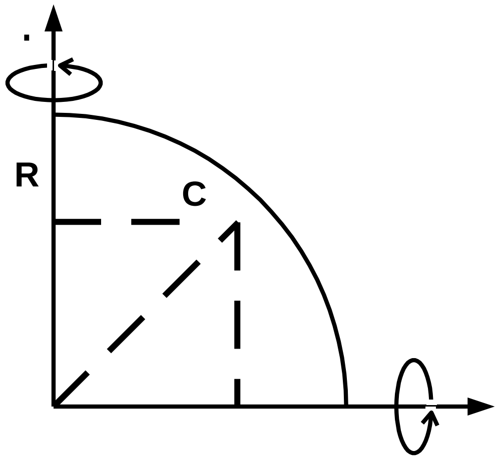
Exemple

1) Détermination de la surface d'un tore.



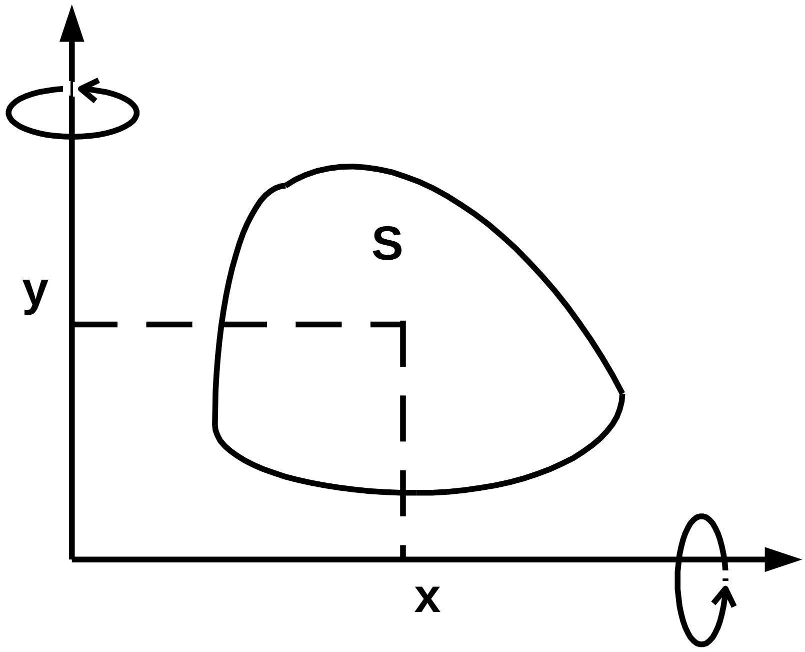
Aire du tore : $2\pi r \,.\, 2\pi R = 4\pi^2 rR$

2) Détermination du barycentre d'un quart de cercle de rayon R.



$$l = \pi\frac{R}{2} \qquad S_x = S_y = 2\pi R^2 \quad \rightarrow \quad x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$$

Deuxième théorème de Guldin



Le volume d'un solide de révolution *est égal au produit de l'aire de la section plane engendrée d'un côté de l'axe de révolution par la longueur de la trajectoire décrite par le centre de gravité de la courbe génératrice pour une révolution complète.*

Ce théorème permet de déterminer les coordonnées du barycentre.

$$\boxed{x_c = \frac{V_y}{2\pi A}} \qquad \boxed{y_c = \frac{V_x}{2\pi A}}$$

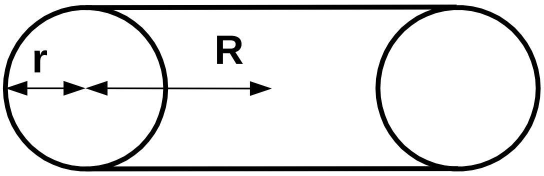
A Aire de la surface

V_y Volume obtenu en faisant tourner la surface S autour de l'axe y

V_x Volume obtenu en faisant tourner la surface S autour de l'axe x

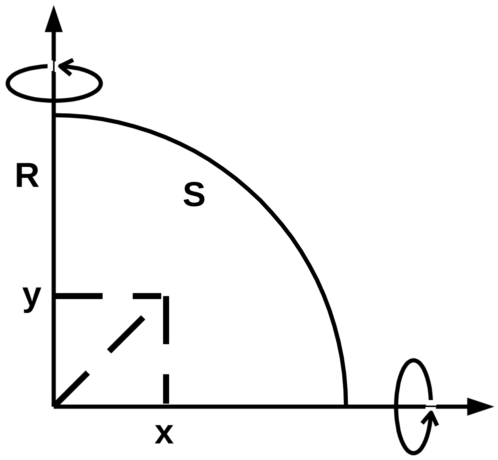
Exemple

1) Détermination du volume d'un tore.



Volume du tore : $\pi r^2 \, . \, 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$

2) Détermination du barycentre d'un quart de cercle de rayon R.



$$A = \pi\frac{R^2}{4} \qquad V_x = V_y = \frac{2\pi R^2}{3} \quad \rightarrow \quad x_c = y_c = \frac{2R}{3\pi}$$