Un train démarre du sommet d'une côté de 1% et parcourt 1200 m sous l'influence de la gravité avant d'arriver sur une voie plate. Le frottement constant vaut 50 N par tonne. Trouvez la vitesse au bas de la côte et la distance horizontale parcourue avant l'arrêt.

Pente : $\tan\alpha = .01 \Rightarrow \alpha = 0.573°$

a) Calcul de la vitesse au bas de la pente dans le cas où les forces de frottement sont nuls.

$$\Delta E_c = \Delta E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\sin\alpha} = \sqrt{2\times g\times 1200\times\sin 0.573°} = 15.34 \text{ m/s}$$

b) Calcul de la vitesse en tenant compte des forces de frottement.

Notons que $F_f = 50$ N/tonne $= 0.05$ N/kg est en fait du point de vue dimensionnel une accélération. En effet, $\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ car des N sont des kg.m/s^2. Soit donc $F_f = 0.05$ m/s^2

Les forces de frottement sont égales à : $\mathscr{F}_f = \frac{N}{g}.F_f$ où N est la réaction perpendiculaire au sol $N = mg\cos\alpha$ (On projette le poids selon la direction $\perp$ à la pente)

La variation d'énergie cinétique est égale à la variation d'énergie potentielle moins le travail des forces de frottement $\Rightarrow \Delta E_c = \Delta E_p - \Delta W_{\mathscr{F}_f}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh - l.\mathscr{F}_f = m.g.\underbrace{h}_{=l\sin\alpha} - l.\frac{N}{g}.F_f = mgl\sin\alpha - l.m.F_f.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2l\left(g\sin\alpha - F_f\cos\alpha\right)} = \sqrt{2\times 1200\times\left(g\sin 0.573° - 0.05\cos 0.573°\right)} = 10.744 \text{ m/s}$$

c) C'est un MRUD avec $a = -0.05$ m/s^2

$$v = v_0 - at = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} \text{ or } x = v_0 t - \frac{at^2}{2} \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{10.744^2}{2\times 0.05} = 1154.34 \text{ m}$$

Un wagonnet de 1500 kg doit parcourir en 2.5 minutes un trajet de 200 m suivant une pente de 16%. Le frottement a un coefficient de 0.1, le moteur a un rendement de 75% et le kWh électrique coûte 4 FB. Que coûtera une heure de travail ?

$\alpha = \arctan(0.16) = 9.09°$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F.L}{t} = \frac{\left(F_{//} + F_f\right).L}{t} = \frac{mgL}{t}\left(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1500\times g\times 200}{2.5\times 60}(\sin 9.09° + 0.1.\cos 9.09°) = 5.037 \text{ kWh}$$

$$P_{réel} = \frac{P}{\eta} = \frac{5.037}{0.75} = 6.716 \text{ kW}$$

Pour une heure de travail : $W = P_{réel}t = 6.716\times 1 = 6.716$ kWh

Coùt : $C = 4W = 4\times 6.716 = 26.864$ FB

Un camion bute contre un obstacle à la vitesse de 72 km/h. Quelle énergie cinétique possède le chauffeur de 70 kg ? De quelle hauteur devrait-il tomber pour avoir la même énergie cinétique ?

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 70\times\left(\frac{72}{3.6}\right)^2 = 14000 \text{ J}$$

$$E_p = E_c \Rightarrow h = \frac{mv^2}{2mg} = \frac{v^2}{2g} = \frac{(72/3.6)^2}{2g} = 20.387 \text{ m}$$

Un canon éjecte horizontalement un obus de 600 kg en 1/40 s en lui donnant la vitesse de 935 m/s. A quelle puissance cela correspondra-t-il ?

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E_c}{t} = \frac{mv^2}{2t} = \frac{600\times 935^2}{2\times(1/40)} = 1.05\times 10^6 \text{ W}$$

Que vaut la masse d'un corps qu'un moteur de 4.5 kW tire sur une surface horizontale à la vitesse de 7 m/s si le coefficient de frottement vaut 0.2 ?

$$P = Fv = \mu_c mgv \Rightarrow m = \frac{P}{\mu_c gv} = \frac{4500}{0.2\times g\times 7} = 327.65 \text{ kg}$$

A la quantième seconde un corps en chute libre parcourt-il 112.6 m ?

La $n^{ème}$ seconde se passe entre $t = n-1$ et $t = n$

$$x_n = \frac{gn^2}{2}, \qquad x_{n-1} = \frac{g(n-1)^2}{2} \Rightarrow \Delta x = x_n - x_{n-1} = \frac{g}{2}\left(n^2-(n-1)^2\right) = 112.6$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow n = 13$$

Un corps en chute libre passe devant 2 points de mesure séparés de 12 m en un intervalle de temps de 1 s. De quelle hauteur au-dessus du point de mesure supérieur le corps tombe-t-il et quelle est sa vitesse aux deux points ?

Soit (1) le point le plus haut. Le mobile passe en (1) en $t = n$

Soit (2) le point le plus haut. Le mobile passe en (2) en $t = n-1$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{g}{2}\left(n^2-(n-1)^2\right) = 12 \Rightarrow \ldots \Rightarrow n = 1.723 \text{ s et } n-1 = 0.723 \text{ s.}$$

Distance au dessus de (1) : $h = \dfrac{g(n-1)^2}{2} = 2.57$ m

et $v_1 = g(n-1) = 7.09$ m/s, $\quad v_2 = gn = 16.90$ m/s

A) Un corps tombe d'une hauteur de 800 m. Simultanément, un deuxième corps est lancé du sol vers le haut avec une vitesse initiale de 200 m/s. Après combien de temps et à quelle hauteur les deux corps se croisent-ils.

B) Si le second corps quitte le sol deux secondes plus tard à 200 m/s, après combien de temps et à quelle hauteur des deux corps se croiseront-ils ?

C) Si le second corps quitte le sol deux secondes plus tard, quelle vitesse initiale doit-il avoir pour que le croissement se passe à mi-hauteur ?

A) Le corps du haut (1) va parcourir une distance : $x = \dfrac{gt^2}{2}$

Le corps du bas (2) va parcourir une distance : $800 - x = 200t - \dfrac{gt^2}{2}$

$$\Rightarrow 800 - \cancel{\frac{gt^2}{2}} = 200t - \cancel{\frac{gt^2}{2}} \Rightarrow t = 4 \text{ s} \Rightarrow x = 78.48 \text{ m} \Rightarrow h = 800 - x = 721.52 \text{ m}$$

B) On a directement en s'inspirant du point A)

$$800 - x = 200(t-2) - \frac{g(t-2)^2}{2} \quad \text{avec } x = \frac{gt^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow t = 5.47 \text{ s} \Rightarrow h = 800 - \frac{gt^2}{2} = 653 \text{ m}$$

c) Le temps pour que le corps descente à mi-hauteur est : $400 = \dfrac{gt^2}{2} = 9.03 \text{ s}$

Donc pour le deuxième corps : $400 = v(9.03-2) - \dfrac{g(9.03-2)^2}{2} \Rightarrow v = 91.38 \text{ m/s}$

Du haut d'un immeuble de 19.62 m, un homme lâche une pierre. Simultanément, du pied de l'immeuble monte une pierre à la vitesse initiale de 9.81 m/s

- A quel moment les pierres se croiseront-elles ?
- A quelle hauteur aura lieu la rencontre ?
- Quelle vitesse initiale devrait avoir la pierre lancée du sol pour que la rencontre ait lieu à mi-distance ?

a) Soit x la distance en partant du haut où les deux pierres se croisent.

$$\begin{cases} x = \dfrac{gt^2}{2} & \text{pour la pierre du haut} \\ 19.62 - x = 9.81t - \dfrac{gt^2}{2} & \text{pour la pierre du bas} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 19.62 - \cancel{\frac{gt^2}{2}} = 9.81t - \cancel{\frac{gt^2}{2}} \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

b) $x = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{g \times 2^2}{2} = 19.62 \text{ m}.$

Les deux pierres ne se croisent pas. La première pierre arrive sur le sol quand la deuxième retombe elle aussi sur le sol.

c) Il faut alors que $x = \dfrac{19.62}{2}$ m

Pour effectuer cette distance il faut un temps : $t = \sqrt{\dfrac{2x}{g}} = \sqrt{\dfrac{19.62}{g}} = \sqrt{2}$ s

Donc pour la deuxième pierre : $\dfrac{19.62}{2} = v_0.\sqrt{2} - \dfrac{g\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} \Rightarrow v_0 = 13.87$ m/s

---

Une voiture dont la vitesse initiale est de 20 km/h est soumise à une accélération de $\left[(5 \text{ km/h})/\text{s}\right]$. Que vaudra sa vitesse après un parcours de 500 m ?

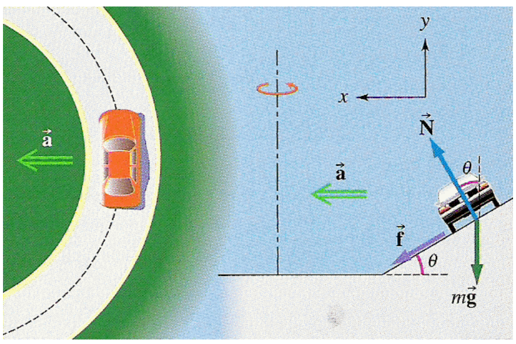
$$a = 5 \text{ km/h/s} = \frac{5}{3.6} = 1.389 \text{ m/s}^2$$

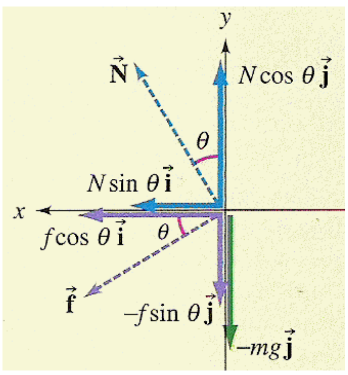
$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow 500 = \frac{20}{3.6}t + \frac{1.389}{2}t^2 \Rightarrow t = 23.12 \text{ s}$$

$$\Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow v = 37.69 \text{ m/s}$$

Une voiture s'engage dans un virage de 24 m de rayon. Si le coefficient de frottement des pneus sur le sol vaut 0.30. Déterminez la vitesse maximale que peut avoir la voiture afin de ne pas déraper.

a) Si la route est horizontale?
b) Si le virage est relevé de 10°?
c) Si le virage est abaissé de 5°?





Ecrivons l'équilibre des forces : $\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = \vec{F_C}$
Nous en déduisons les deux relations sclaires suivantes en projetant selon les axes

$$x \text{ et } y : \begin{cases} N\sin\theta + f\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \\ N\cos\theta - f\sin\theta - mg = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad f = \mu N \Rightarrow \begin{cases} N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \dfrac{mv^2}{R} \\ N(\cos\theta - \mu\sin\theta) = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{R(\sin\theta + \mu\sin\theta)} = \frac{mg}{\cos\theta - \mu\cos\theta} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{Rg\,\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}}$$

a) Si $\theta = 0° \quad \Rightarrow v = \sqrt{Rg\mu} = \sqrt{24 \times g \times 0.3} = 8.40$ m/s

b) Si $\theta = 10° \Rightarrow v = \sqrt{24g\,\dfrac{\sin 10° + 0.3 \times \cos 10°}{\cos 10° - 0.3 \times \sin 10°}} = 10.88$ m/s

c) Si $\theta = -5° \Rightarrow v = \sqrt{24g\,\dfrac{\sin(-5°) + 0.3 \times \cos(-5°)}{\cos(-5°) - 0.3 \times \sin(-5°)}} = 6.98$ m/s

.

7- Le pilote de 70 kg d'un avion bascule son appareil tête en bas pour décrire un cercle vertical dans l'espace. Au sommet de sa trajectoire, il exerce une force de 200 N sur son siège. Si la vitesse de l'avion est de 144 km/h, que vaut le rayon de la trajectoire ?
<u>R</u> : r = 126 m si le pilote a la tête en bas au sommet de la trajectoire
r = 230.12 m si le pilote a la tête en haut au sommet de la trajectoire.

a) <u>Tête en bas</u>

La force centripède est égale à la somme du poids du pilote (mg) et de la réaction du fauteuil (N)

$$mg + N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv^2}{mg + N} = \frac{70 \times \left(\dfrac{144}{3.6}\right)^2}{70g + 200} = 126.31 \text{ m}$$

b) <u>Tête en haut</u>

La force centripède est égale à la différence du poids du pilote (mg) et de la réaction du fauteuil (N)

$$mg - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv^2}{mg - N} = \frac{70 \times \left(\dfrac{144}{3.6}\right)^2}{70g - 200} = 230.12 \text{ m}$$