Méthodes d'intégration – Niveau Math 4h

Nous reprenons les principales méthodes classiques d'intégration.
Il convient d'appliquer cette fiche en suivant l'ordre des méthodes proposées.

Notons, enfin, que souvent plusieurs méthodes sont possibles et que ceci n'a pas pour but d'offrir des recettes magiques qui fonctionnement à tous les coups. On doit donc simplement s'en servir comme outils et aide-mémoire.

1 - Intégrale immédiate

Il s'agit de l'application simple et immédiate des formules que l'on peut trouver dans n'importe quel formulaire.

Exemple 1.1 : $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

Exemple 1.2 : $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Exemple 1.3 : $\int e^x dx = e^x + C$

2 – Somme ou différence de fonctions

L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

Exemple 2.1

$$\int x + x^2 - \frac{1}{x} \, dx = \int x \, dx + \int \; x^2 \, dx - \int \; \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C$$

Beaucoup de situations peuvent se ramener à une somme de fonctions

1) Quotient de polynômes

Quand le degré du numérateur est égal ou plus grand que le degré du dénominateur, on effectue la division euclidienne

Soit à intégrer la fraction rationnelle : $f(x) / g(x)$ où $f(x)$ est un polynôme de degré m et $g(x)$ un polynôme de degré n avec $m \geq n$, on effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$

Exemple 2.2 :

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x^2 - x + 3 - \frac{2}{x+1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x+1| + C$$

Exemple 2.3

$$\int \frac{x^6}{x-1}\,dx = \int \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$$

2) Produit de polynômes

Pour un produit de polynômes, on distribue.

Exemple 2.4

$$\int (x-1)(x+2)\,dx = \int \; x^2 + x - 2\; dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Exemple 2.5

$$\int (x-1)^2\,dx = \int \; x^2 - 2x + 1\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$$

Exemple 2.6

$$\int \; (t^2+1)\sqrt{t}\; dt = \int \; t^2\sqrt{t} + \sqrt{t}\; dt = \int \; t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\; dt = \frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$$

3 – Composée de fonction

On détermine si un facteur est la dérivée, d'un autre facteur (à un coefficient près), on applique les composées de fonction

Si on peut arriver à identifier un **facteur comme étant la dérivée d'un autre**, la solution est presque immédiate.

Formule 3.1 : $\boxed{\int h'(g(x))\, g'(x)\, dx = h(g(x)) + C}$

Rappel : la différentielle est égale à la dérivée de la fonction multiplié par la différentielle de la variable :

Exemples :

$$d(t^2) = 2t.dt$$
$$d(u^3 - 2u + 3) = (3u^2 - 2)du$$
$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

<u>Exemple 3.1 :</u>

Méthode 1

$$\int (2x-1)(x^2-x+1)^3\,dx = \frac{(x^2-x+1)^4}{4} + C$$

Car on a : $\begin{cases} g'(x) = 2x-1 & \Rightarrow\; g(x) = x^3 - x + 1 \\ h'(x) = x^3 & \Rightarrow\; h(x) = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

Méthode 2

Les composées de fonction peuvent être vues comme un cas particulier de substitution

Revenons à l'exemple 3.1

$$I = \int \overbrace{(2x-1)}^{\substack{\text{Dérivée de} \\ x^2-x+1}} (x^2-x+1)^3\,dx.$$

On pose : $t = x^2 - x + 1 \Rightarrow dt = (2x-1)dx$ et on remplace

$$\Rightarrow I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4} + C$$

<u>Exemple 3.2 :</u>

Méthode 1 :

$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1) + C$ car on a $\begin{cases} g'(x) = e^x & \Rightarrow\; g(x) = e^x + 1 \\ h'(x) = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow\; h(x) = \ln x \end{cases}$

Méthode 2

$$\int \frac{\overbrace{e^x}^{(e^x+1)'}}{e^x+1}dx \quad \text{On pose } : t = e^x+1 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln(e^x+1)+C$$

On doit parfois faire des ajustements numériques pour faire apparaître la dérivée cherchée.

Exemple 3.3 :

$$I = \int t(3t^2+2)^5 dt = \overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{Ajustement numérique}} \int \overbrace{6t}^{(3t^2+2)'} (3t^2+2)^5 \, dt$$

$$\text{On pose : } u = 3t^2+2 \Rightarrow du = 6t\,dt \Rightarrow I = \frac{1}{6}\int u^5 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^6}{6} = \frac{(3t^2+2)^6}{36}+C$$

Exemple 3.4 :

$$\int (2x-3)(x^2+x+1)dx = \int \left(\overbrace{2x+1}^{(x^2+x+1)'}-4\right)(x^2+x+1)\,dx$$

$$= \int (2x+1)(x^2+x+1)dx - 4\int (x^2+x+1)dx$$

$$= \frac{(x^2+x+1)^2}{2} - 4\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right) = \frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+\frac{1}{2}+C$$

Note : On aurait pu aussi simplement développer le produit.

Exemple 3.5 :

$$I = \int e^{\cos^2 x}\sin 2x\,dx = \overbrace{-}^{\text{Ajustement numérique}} \int e^{\cos^2 x}\overbrace{(-2\sin x\cos x)}^{\text{Dérivée de } \cos^2 x}\,dx.$$

$$\text{On pose : } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\cos x.\sin x\,dx \Rightarrow I = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\cos^2 x}+C$$

Exemple 3.6 :

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int \overbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}^{(\tan x)'}\tan x\,dx. \text{ On pose : } t = \tan(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow I = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

4- Par substitution

C'est une des méthodes les plus efficaces et donc la plus utilisée. Les substitutions à opérer ne sont pas toujours évidentes, mais certaines sont assez classiques.
Cependant en Math 4h, on ne verra que quelques cas simples :

Quelques changements de variable types

Forme de fonction	Changement de variable	dx
$f(ax+b)$	$u=ax+b$	$dx=\frac{1}{a}du$
$f(\sqrt{x})$	$u=\sqrt{x}$	$dx=2udu$
$f(\sqrt{ax+b})$	$u=ax+b$	$dx=\frac{1}{a}du$
$f(\sqrt[n]{ax+b})$	$u=ax+b$	$dx=\frac{1}{a}du$
$f(e^x)$	$u=e^x$	$dx=\frac{1}{u}du$
$f(a^x)$	$u=a^x$	$dx=\frac{1}{u\ln a}du$

Formule 4.1 : $\boxed{\int f(x)dx=\int f(g(t))\,g'(t)dt}$

On essaie de faire des substitutions pour simplifier les puissances et les racines.

Exemple 4.1 :

$$I=\int (x-1)(x+3)^2\,dx.\ \text{ On pose : } t=x+3\Rightarrow\begin{cases}x=t-3\Rightarrow x-1=t-4\\ dt=dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int (t-4)t^2dt=\int t^3-4t^2dt=\frac{t^4}{4}-4\frac{t^3}{3}=\frac{(x+3)^4}{4}-\frac{4(x+3)^3}{3}+C$$

Exemple 4.2

$$I=\int (x-2)\sqrt{2x+1}\,dx.\text{ On pose } t=2x+1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow x-2=\frac{t}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(t-5)\\ dt=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{1}{2}(t-5)\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int t^{\frac{3}{2}}-5t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-5\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{10}\sqrt{(2x+1)^5}-\frac{5}{6}\sqrt{(2x+1)^3}+C$$

Exemple 4.3 :

$$I=\int x(1+x)^5\,dx$$

Posons : $t=1+x,\quad t\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ x=t-1=g(t)\ \Rightarrow\ g'(t)=1$

$$\Rightarrow I=\int(t-1)t^5\,dt=\int t^6dt-\int t^5dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{(1+x)^7}{7}-\frac{(1+x)^6}{6}+C=\frac{(6x-1)(1+x)^6}{42}+C$$

Exemple 4.4

$I=\int (x+2)\sqrt[3]{x+1}\,dx.$ On pose $t=x+1\begin{cases}x=t-1\Rightarrow x+2=t+1\\ dt=dx\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int (t+1)\sqrt[3]{t}\,dt=\int t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{1}{3}}\,dt=\frac{t^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$$

Exemple 4.5 : (Plus complexe)

$$I=\int\frac{dx}{e^x-1}\quad \text{Posons}\quad y=e^x\Rightarrow e^xdx=dy\ \Rightarrow dx=\frac{dy}{e^x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow I=\int\frac{\frac{1}{y}dy}{y-1}=\int\frac{\frac{1}{y^2}dy}{\frac{y-1}{y}}$$

$$\text{Posons } u=\frac{y-1}{y}\Rightarrow du=\frac{1}{y^2}dy\Rightarrow I=\int\frac{du}{u}=\ln|u|=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|$$

$$\Rightarrow\ I=\ln\left|e^x-1\right|-x+C$$

5 - Intégration par parties

C'est une méthode très puissante et donc souvent utilisée.

Ce procédé s'applique pour calculer les primitives des fonctions suivantes :

- ✓ **Produit d'une fonction polynomiale par un sinus, un cosinus, une fonction exponentielle ou une fonction logarithme.**
- ✓ **Produit d'une exponentielle par un sinus ou un cosinus.**
- ✓ **Fonctions trigonométriques réciproques. (Math 6h)**
- ✓ **Certaines racines carrées.**

Exemples : $xe^x, x^2\ln x, (x^2+1)\cos x, \sin x\cos 3x, e^x\sin x$

Formule 5 : $\boxed{\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx}$

Le choix de $f(x)$ et $g'(x)$ est dicté par le fait d'obtenir une intégrale plus simple que celle de départ. Si ce n'est pas le cas, il suffit de permuter les expressions.

Exemple 5.1 :

$$I = \int x.e^x dx \quad \begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow I = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Exemple 5.2 :

$$I = \int x\cos x\,dx \begin{cases} f(x) = x \quad \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x \Rightarrow g = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Exemple 5.3 :

$$I = \int (x+1)\ln(x)\,dx \begin{cases} f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \text{(On a intérêt à faire disparaître le ln)} \\ g'(x) = x+1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \int \frac{x}{2} + 1\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4} - x + C$$

Exemple 5.4 :

On peut devoir appliquer plusieurs fois de suite l'intégration par parties.

$$I = \int x^2 e^x \begin{cases} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow I = x^2 e^x - \underbrace{2\int xe^x dx}_{\text{On applique une deuxième fois la méthode}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

Exemple 5.5 :

$$I=\int \ln x\,dx=\int \overset{\text{Polynôme de degré zéro}}{1}\cdot \ln x\,dx \quad \begin{cases} f(x)=\ln(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=1 \quad \Rightarrow g(x)=x \end{cases}$$

$$I=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1\cdot dx=x\ln x-x+C$$

Exemple 5.6 :

On revient parfois à l'intégrale de départ.

$$I=\int e^x.\sin x\,dx$$

$$\begin{cases} f(x)=e^x & \Rightarrow \quad f'(x)=e^x \\ g'(x)=\sin x & \Rightarrow \quad g(x)=-\cos x \end{cases} \Rightarrow I=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

$$\begin{cases} f(x)=e^x & \Rightarrow \quad f'(x)=e^x \\ g'(x)=\cos x & \Rightarrow \quad g(x)=\sin x \end{cases} \Rightarrow I=-e^x\cos x+e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{\text{On revient à l'intégrale de départ}}$$

$\Rightarrow I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$ C'est une simple équation en I

$$\Rightarrow 2I=-e^x\cos x+e^x\sin x \quad \Rightarrow \quad I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

Exemple 5.8 : (Plus complexe)

$$I=\int \sin(\ln x)\,dx$$

Soit $y=\ln x \Rightarrow dy=\dfrac{dx}{x} \Rightarrow dx=x\,dy=e^y\,dy \Rightarrow I=\int \sin y\,e^y dy$

Par parties : $\begin{matrix} u=\sin y & u'=\cos y \\ v'=e^y & v=e^y \end{matrix} \Rightarrow I=e^y\sin y-\int e^y\cos y\,dy$

Par parties : $\begin{matrix} u=\cos y & u'=-\sin y \\ v'=e^y & v=e^y \end{matrix}$

$$\Rightarrow I=e^y\sin y-e^y\cos y-\int \sin y\,e^y dy=e^y\sin y-e^y\cos y-I$$

$$\Rightarrow 2I=e^y(\sin y-\cos y) \Rightarrow I=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$$