

La factorisation.

La factorisation permet de résoudre de nombreux problèmes comme la résolution des équations, des inéquations, les études de signes, etc.

1) **La mise en évidence** : Si une mise en évidence est possible, il faut toujours la faire.

Exemples : $2xy - 4y^2 = 2y(x + 2y)$

$$x^3 + 8x^2 + x + 8 = x(x^2 + 1) + 8(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + 8)$$

2) **Les produits remarquables** :

$$\begin{array}{l|l} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) & a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 & a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \\ & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 \end{array}$$

Note : $a^2 + b^2$ NE SE FACTORISE PAS dans les réels.

3) **Equation du second degré** : $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$

a. **Méthode du Δ (ou du ρ)**

$$\Delta = b^2 - 4ac = \begin{cases} > 0 & \text{Deux racines} \\ = 0 & \text{Une racine} \\ < 0 & \text{Pas de solution} \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\text{Note : si } P(x) = ax^2 + 2b'x + c, \text{ alors } \Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

b. **Somme-produit** : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple :

$P(x) = x^2 + 3x - 4$. Les racines sont -4 et 1 car $P = -4 \times 1 = -4$ et $S = -(-4 + 1) = +3$

$$\Rightarrow P(x) = (x + 4)(x - 1)$$

4) **Méthode de Horner** : (Equation du troisième degré et plus)

Exemple :

$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 6$. Les diviseurs de 6 sont $div(6) = \pm 1; \pm 2 \pm 3 \pm 6$. On vérifie

immédiatement que le polynôme vaut 0 pour $x = 1$. On établit alors le tableau de Horner.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & -2 & 6 \\ 1 & & 1 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$