Distance d'un point à une droite.

Calculer la distance entre le point P :(–8,7,3) et la droite d qui est perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 3x - 6y + z = 12$ et qui passe par le point Q : (5,6,4)

1ère méthode.

Plan α' // à α et passant par P :

$$\alpha' = 3x - 6y + z = d \quad \text{or } P \in \alpha' \Rightarrow 3(-8) - 6(7) + 3 = d \Rightarrow d = -63$$

$$\Rightarrow \alpha' \equiv 3x - 6y + z = -63$$

Droite d :

$$d = \begin{cases} x = 5 + 3s \\ y = 6 - 6s \\ z = 4 + s \end{cases}$$

Point de percée P' de la droite d dans le plan α'

$$P' = d' \cap \alpha' \Rightarrow 3(5+3s) - 6(6-6s) + 4 + s = -63 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow P' : (2,12,5)$$

Distance de P à d

$$d(P,d) = d(P,P') = \sqrt{(2+8)^2 + (12-7)^2 + (3-3)^2} = 5\sqrt{5}$$

2ème méthode

Soient deux points quelconques de d : $Q : (5,6,4)$ et $A : (8,0,5)$

On a :

$$\overrightarrow{PQ} : (13,-1,1);\ \overrightarrow{PA} : (16,-7,2);\ \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA} : (5,-10,-75);\ \left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA}\right\| = \sqrt{5750}$$

$$\overrightarrow{QA} : (3,-6,1);\ \left\|\overrightarrow{QA}\right\| = \sqrt{46}$$

La distance est donnée par :

$$d(P,d) = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|} = \frac{\sqrt{5750}}{\sqrt{46}} = 5\sqrt{5}$$

3ème méthode

Le vecteur directeur unitaire de d est $\overrightarrow{1_{v_d}} : \dfrac{(3,-6,1)}{\sqrt{46}}$

On a aussi : $\overrightarrow{PQ} : (13,-1,1);\ \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = 171$

La distance est donnée par

$$d(P,d) = \sqrt{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{1_{v_q}} . \overrightarrow{PQ}\right)^2} = \sqrt{171 - \frac{\left((6,-6,1)(13,-1,1)\right)}{46}} = 5\sqrt{5}$$