

Analyse de fonction

Il est recommandé de porter sur un graphique les résultats au fur et à mesure de l'obtention de ceux-ci et d'esquisser la fonction. Cela permet souvent d'en contrôler la cohérence. Un graphique au propre sera refait en fin d'étude.

1. Domaine

Chercher l'ensemble des nombres réels pour lesquels $f(x)$ est défini.

Les points pour lesquelles la fonction diverge sont les pôles de la fonction. Ce sont généralement les zéros des dénominateurs.

2. Continuité

Etudier si $f(x)$ est continue sur son domaine et sinon, chercher et classifier les discontinuités.

3. Symétrie et périodicité.

Fonction paire

$$f(-x) = f(x)$$

Fonction impaire

$$f(-x) = -f(x)$$

Fonction périodique

$$f(x+ka) = f(x) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4. Zéros de la fonction

Déterminer les zéros de la fonction. (Annuler le numérateur des fractions).

5. Intersection avec l'axe de y (Ordonnée à l'origine)

Calculer $f(0)$, si 0 appartient au domaine

6. Etude du signe de la fonction

Déterminer au moyen d'un tableau, le signe de la fonction dans son domaine.

7. Asymptotes

Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = a$$

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \Rightarrow AH \equiv y = a$$

Asymptote oblique

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = p \end{array} \right\} \Rightarrow AO \equiv y = mx + p$$

Remarques

- 1) On calculera les limites à gauche et à droite. Les résultats doivent être cohérents avec le tableau de signe de la fonction.
- 2) D'un côté (côté $x > 0$ ou côté $x < 0$), il ne peut pas avoir une AH et une AO. Cependant, il est possible d'avoir des AH et/ou AO différentes à gauche et à droite.
- 3) Dans le cas des fractions rationnelles, la détermination des AO peut se faire par division euclidienne.
- 4) En général, la détermination des asymptotes permet déjà d'avoir une très bonne idée de l'allure de la fonction.

8. Dérivée première.

Calculer la dérivée première.

Déterminer les zéros de la dérivée première s'ils existent.

Etablir un tableau de signe de la dérivée première et déterminer les domaines de croissance \nearrow et décroissance \searrow de la fonction.

Calculer les coordonnées des éventuels extremums (Maximum M, Minimum m).

Calculer les demi-tangentes aux éventuels points d'arrêt.

9. Dérivée seconde.

Calculer la dérivée seconde.

Déterminer les zéros de la dérivée seconde s'ils existent.

Etablir un tableau de signe de la dérivée seconde et déterminer les concavités (convexe \cup , concave \cap) de la fonction.

Calculer les coordonnées des éventuels points d'inflexion (PI).

Calculer les tangentes aux éventuels points d'inflexion.

10. Tableau récapitulatif.

Tableau reprenant tous les points caractéristiques de la fonction. (Pôles, Zéros, AV, M, m, PI, ...)

Indiquer les signes des dérivées première et seconde.

Indiquer pour la fonction, les domaines de croissance, de décroissance, et les concavités.

11. Calcul de points supplémentaires.

Calculer quelques points supplémentaires judicieusement choisis.

12. Graphique.

Faire un graphique soigné de la fonction en reprenant tous les éléments qui ont été déterminés dans l'étude.